

# BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. DE DONDER

## Sur les invariants intégraux de l'optique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 42 (1914), p. 91-95

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1914\\_\\_42\\_\\_91\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__91_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX DE L'OPTIQUE;**

PAR M. TH. DE DONDER.

La très intéressante démonstration du théorème de Straubel, que donne M. Dontot <sup>(1)</sup>, pourrait être simplifiée grâce aux deux théorèmes que j'ai publiés en 1913 <sup>(2)</sup> et dont j'ai indiqué diverses applications à la physique mathématique.

**THÉORÈME I.** — *Si  $\rho$  est un invariant et si*

$$(1) \quad I_m \equiv \int M \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_m$$

---

<sup>(1)</sup> *Bull. Soc. math. de France*, t. XLII, fasc. 1, 1914.

<sup>(2)</sup> *Sur un théorème de Jacobi* (*C. R. Acad. Sc.*, 10 février 1913); *Sur la répartition ergodique* (*Bull. Acad. royale de Belgique: Cl. des Sciences*, n° 3, 1913, p. 211-221).



réduit (au signe près) à

$$\sum_i (-1)^i M X_i \delta x_1 \dots \delta x_{i-1} \delta x_{i+1} \dots \delta x_m \quad (i = 1 \dots m);$$

or, cette dernière fournit un invariant intégral des équations (1).

C. Q. F. D.

Considérons maintenant avec M. Dontot les extrémales de

$$\delta \int n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 0$$

ou  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $z' = \frac{dz}{dt}$ . L'étude de ces extrémales revient à celle des équations différentielles

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w}, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

sur la variété invariante

$$(5) \quad H \equiv \frac{1}{2n^2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}.$$

On a posé

$$u = \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial x'} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

de même pour  $v$  et pour  $w$ .

Les équations (4) admettent l'invariant intégral

$$I_6 \equiv \int \delta x \delta y \delta z \delta u \delta v \delta w.$$

Appliquons le théorème I, d'où l'invariant intégral 5-uple

$$A_5 \equiv \int \frac{n^2}{u} \delta x \delta y \delta z \delta v \delta w$$

sur la variété (5).

Appliquons le théorème II, d'où l'invariant intégral (1) 4-uple

$$A_4 \equiv \int \frac{n^2}{u} \left[ \frac{u}{n^2} \delta y \delta z \delta v \delta w - \frac{v}{n^2} \delta x \delta z \delta v \delta w + \frac{w}{n^2} \delta x \delta y \delta v \delta w \right. \\ \left. + \frac{\partial H}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \delta w - \frac{\partial H}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \delta v \right].$$

---

(1) La simplification introduite, ici surtout, me paraît importante.

Considérons deux surfaces quelconques  $\sigma$  et  $\sigma'$  dans l'espace ordinaire et joignons respectivement les différents points de  $\sigma$  aux différents points de  $\sigma'$  par des rayons lumineux, alors on aura  $\delta x \delta y \delta z = 0$ , et  $A_4$  se réduira à

$$A_4 \equiv \int (u \delta y \delta z + v \delta z \delta x + w \delta x \delta y) \frac{\delta v \delta w}{u}.$$

Posons avec M. Dontot

$$m = \frac{u}{n} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$p = \frac{v}{n},$$

$$q = \frac{w}{n};$$

donc  $m, p, q$  sont les cosinus directeurs de la demi-tangente au rayon lumineux dans le sens de propagation de la lumière.  $A_4$  devient

$$\int n^2 [m \delta y \delta z + p \delta z \delta x + q \delta x \delta y] \frac{\delta p \delta q}{m}.$$

Or  $\frac{\delta p \delta q}{m} = \delta \omega$  (angle solide ou surface élémentaire d'une sphère de rayon  $un$ ), soit  $\theta$  l'angle de la demi-normale à un élément  $\delta \sigma$  de surface, alors

$$n^2 \cos \theta \delta \sigma \delta \omega = \text{const.} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce dernier résultat peut s'obtenir plus rapidement en partant de l'invariant relatif <sup>(1)</sup> :

$$j_1 \equiv \int \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial x'} \delta x$$

$$+ \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial z'} \delta z.$$

En reprenant les cosinus directeurs  $m, p, q$ , on pourra écrire

$$j_1 \equiv \int n (m \delta x + p \delta y + q \delta z).$$

<sup>(1)</sup> *Étude sur les invariants intégraux* [Rendiconti Circolo matematico di Palermo, t. XVI, 1902 (Chap. XIII)].

Par différentiation symbolique, on introduit l'invariant intégral absolu (2-uple)

$$I_2 \equiv \int \delta n (m \delta x + p \delta y + q \delta z) + n (\delta m \delta x + \delta p \delta y + \delta q \delta z).$$

En multipliant  $I_2$  par  $I_2$  symboliquement et en tenant compte de ce que  $\delta x \delta y \delta z$  dans ce théorème d'optique est nul, on obtient

$$\begin{aligned} I_2^* &\equiv \int n^2 (\delta x \delta y \delta m \delta p + \delta y \delta z \delta p \delta q + \delta z \delta x \delta q \delta m) \\ &\equiv \int n^2 \left( q \delta x \delta y \frac{\delta m \delta p}{q} + m \delta y \delta z \frac{\delta p \delta q}{m} + p \delta z \delta x \frac{\delta q \delta m}{p} \right) \\ &\equiv \int n^2 \cos \theta \delta \sigma \delta \omega. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

---