

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. D. BIRKHOFF

## **Démonstration du dernier théorème de géométrie de Poincaré**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 42 (1914), p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1914\\_\\_42\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**BULLETIN**  
DE LA  
**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.**

---

**DÉMONSTRATION DU DERNIER THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE  
DE POINCARÉ;**

PAR M. GEORGE-D. BIRKHOFF (1).

Dans un article publié récemment dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. XXXIII, 1912, p. 375-407) et intitulé *Sur un théorème de Géométrie*, Poincaré a énoncé un théorème de grande importance, en particulier pour le problème restreint des trois corps; mais, n'ayant réussi, après de longs efforts, qu'à traiter une série de cas spéciaux, il a laissé le théorème à l'étude des autres mathématiciens.

Il y a quelques années, je me suis occupé de questions analogues et il se trouve que les méthodes dont je me suis servi sont applicables ici. Dans le présent article, je donne la brève démonstration que j'ai obtenue, mais je laisse de côté d'autres résultats auxquels j'ai été conduit (2).

1. *Énoncé du théorème.* — Le théorème de Poincaré peut être énoncé simplement comme il suit : « Supposons qu'une transformation  $T$  continue et biunivoque transforme en lui-même l'anneau  $R$  formé par les cercles concentriques  $C_a, C_b$  de rayons respectifs  $a, b$  ( $a > b > 0$ ), de manière à faire avancer les points de  $C_a$  dans le sens positif, les points de  $C_b$  dans le sens négatif,

---

(1) *Transactions of the American mathematical Society*, vol. XIV, n° 1, p. 14-22, janvier 1913. Traduit de l'anglais par M. M. Janet.

(2) Quelques-uns de mes résultats sont contenus dans un article intitulé : *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques*, qui a paru récemment dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1912, t. XL).

et à conserver les aires : *il y a alors au moins deux points invariants.* »

Dans la démonstration de ce théorème, nous nous servirons de coordonnées polaires modifiées  $y = r^2$ ,  $x = \theta$ , où  $r$  est la distance du point  $x, y$  au centre  $O$  des cercles, et  $\theta$  l'angle que fait la droite qui joint  $O$  au point  $(x, y)$  avec une droite fixe issue de  $O$ . La transformation  $T$  peut s'écrire

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y).$$

La fonction  $\psi(x, y)$  est une fonction continue de  $(x, y)$  qui n'a qu'une valeur en chaque point de  $R$ , et qui est par suite périodique en  $x$  de période  $2\pi$ . La fonction  $\varphi(x, y)$  admet une infinité de déterminations différant entre elles de multiples entiers de  $2\pi$  et ces déterminations peuvent être groupées de manière à former des branches continues. Puisque  $(x + 2\pi, y)$  et  $(x, y)$  représentent le même point de  $R$ , la différence des valeurs de l'une de ces déterminations pour  $(x + 2\pi, y)$  et  $(x, y)$  est un multiple entier de  $2\pi$ ; et cette différence est un seul et même multiple de  $2\pi$  pour tous les  $(x, y)$ , puisque cette différence est une fonction continue. Mais si le point  $(x, y)$  parcourt le cercle  $C_a$  dans le sens positif, il en est de même de son image  $(x', y')$ ; donc, le long de ce cercle,  $\varphi(x, y)$  augmente de  $2\pi$  quand  $x$  augmente de  $2\pi$ . La différence se réduit ainsi identiquement à  $2\pi$ ; en d'autres termes, quel que soit  $y$  la fonction  $\varphi(x, y)$  augmente de  $2\pi$  si  $x$  augmente de  $2\pi$ .

En conséquence, il est clair que  $x' - x$  et  $y' - y$  sont des fonctions uniformes et continues dans  $R$ .

Le théorème signifie que, si pour quelque détermination de  $\varphi(x, y)$  on a  $x' > x$  le long de  $C_a$ ,  $x' < x$  le long de  $C_b$  (ce qu'une transformation  $T$  assujettie aux conditions précédentes peut réaliser), il y a au moins deux points  $(x, y)$  de  $R$  pour lesquels  $x' = x$ ,  $y' = y$ .

**2. Marche de la démonstration.** — Comme le remarque Poincaré (*loc. cit.*, p. 377) l'existence d'un point invariant implique immédiatement celle d'un deuxième point invariant. Si donc le théorème était faux, la transformation  $T$  n'admettrait pas de point invariant. Dans ce cas, nous aurions

$$(1) \quad (x' - x)^2 + (y' - y)^2 > d^2 > 0,$$

pour tous les points de  $R$ , puisque  $x' - x$  et  $y' - y$  seraient uniformes, continus et non simultanément nuls dans l'anneau  $R$ . Nous établirons le théorème en prouvant que l'hypothèse (1) conduit à une absurdité.

3. *La transformation auxiliaire.* — Si  $0 < \varepsilon < b^2$ , la transformation  $T_\varepsilon$  biunivoque et continue définie par

$$x' = x, \quad y' = y - \varepsilon,$$

transforme respectivement les cercles  $C_a$  et  $C_b$  en des cercles concentriques  $C'_a : y = a^2 - \varepsilon$  et  $C'_b : y = b^2 - \varepsilon$ ;  $C'_a$  étant à la distance  $a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$  de  $C_a$  et à son intérieur,  $C'_b$  à la distance  $b - \sqrt{b^2 - \varepsilon}$  de  $C_b$  et à son intérieur. Cette transformation a pour effet de rapprocher l'anneau de l'origine en laissant chaque point sur son rayon vecteur, et en conservant les aires, puisque  $dx, dy$  restent invariables par la transformation et que l'intégrale des aires est

$$\int \int r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int \int dx \, dy.$$

Tant que  $\varepsilon < d$ , la transformation auxiliaire  $TT_\varepsilon$  obtenue en faisant d'abord la transformation  $T$ , puis la transformation  $T_\varepsilon$  n'a pas de point invariant. En effet, si nous prenons  $x$  et  $y$  comme coordonnées rectangulaires d'un point dans la bande  $S$  :

$$-\infty < x < +\infty, \quad b^2 \leq y \leq a^2,$$

correspondant à l'anneau  $R$ , nous voyons que le point  $(x, y)$  est déplacé au moins d'une longueur  $d$  dans  $S$  par la transformation  $T$ , et d'une longueur  $\varepsilon$  dans la direction des  $y$  négatifs par la transformation  $T_\varepsilon$ , de sorte que si  $\varepsilon < d$ , le point ne peut revenir à sa position initiale. Nous écrivons la transformation résultante  $TT_\varepsilon$  sous la forme

$$\bar{x}' = \varphi(x, y), \quad \bar{y}' = \psi(x, y) - \varepsilon.$$

Choisissons la quantité positive  $\varepsilon$  une fois pour toutes de manière que

$$(2) \quad \varepsilon < b^2, \quad \varepsilon < d, \quad \varepsilon < a^2 - b^2.$$

Considérons maintenant la fonction multiforme

$$(3) \quad \omega(x, y) = \text{arc tang} \frac{y' - y}{x' - x}$$

ou, d'une manière plus précise, les branches de cette fonction qui donnent l'angle que fait le rayon vecteur qui va de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  dans la bande  $S$  avec la direction positive de l'axe des  $x$  (les autres branches correspondant à la direction négative de ce vecteur). En vertu de (1), cette fonction est continue en tout point de  $S$  et par suite se décompose en branches uniformes et continues dans  $S$ .

De plus une quelconque de ces branches se réduit à un multiple pair et impair de  $\pi$  sur  $C_a$  et  $C_b$  respectivement, puisque le long de  $C_a$  on a  $x' > x, y' = y$ , et le long de  $C_b$   $x' < x, y' = y$ .

On a vu que les fonctions  $y' - y$  et  $x' - x$  sont périodiques en  $x$  de période  $2\pi$ , et ainsi, pour une branche quelconque, les valeurs de  $\omega(x, y)$  diffèrent aux points  $(x + 2\pi, y)$  et  $(x, y)$  d'un multiple de  $2\pi$  qui peut se réduire à zéro. Puisque les branches sont continues, ce multiple est le même dans tout  $S$ . Mais le long de  $C_a$  et de  $C_b$ , ces branches ont une valeur constante, d'après une remarque précédente. Par suite, le multiple en question se réduira en fait à zéro. Ainsi, ces branches de  $\omega(x, y)$  sont périodiques en  $x$  de période  $2\pi$ , c'est-à-dire sont uniformes dans  $R$ .

De même il est clair que la fonction multiforme

$$\bar{\omega}(x, y) = \text{arc tang} \frac{\bar{y}' - y}{x' - x},$$

qui donne l'angle du vecteur joignant  $(x, y)$  à  $(\bar{x}', \bar{y}')$  avec la direction positive de l'axe des  $x$ , se réduit à des branches uniformes et continues. De plus, les fonctions  $\bar{y}' - y = y' - y - \epsilon$  et  $\bar{x}' - x = x' - x$  sont périodiques en  $x$  de période  $2\pi$ ; donc chaque branche de  $\bar{\omega}(x, y)$  est périodique en  $x$  le long de  $C_a$  et le long de  $C_b$ . Nous en concluons que les branches de  $\bar{\omega}(x, y)$  aussi bien que celles de  $\omega(x, y)$  sont périodiques en  $x$  de période  $2\pi$  et uniformes dans  $R$ .

Les branches de  $\omega(x, y)$  et de  $\bar{\omega}(x, y)$  peuvent être associées deux à deux, de manière que le maximum de leur différence pour

tout  $(x, y)$  satisfasse à l'inégalité

$$(5) \quad |\omega(x, y) - \bar{\omega}(x, y)| < \frac{\pi}{2}.$$

Cela est évident géométriquement, car le point  $(x', y')$  est au moins à la distance  $d$  de  $(x, y)$  dans  $S$ , et  $(\bar{x}', \bar{y}')$  est à une distance  $\varepsilon < d$  de  $(x', y')$ , de sorte que l'angle sous lequel on voit ces deux derniers points de  $(x, y)$  ne peut jamais devenir égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Si nous associons les branches de manière que l'inégalité (5) ait lieu en un point de  $S$ , elle doit continuer à être valable quand les coordonnées du point varient continûment dans  $S$ .

4. *Construction d'une courbe invariante par la transformation auxiliaire.* — La transformation  $TT_\varepsilon$  transforme le cercle  $C_a$  en  $C'_a$  de rayon  $\sqrt{a^2 - \varepsilon}$  situé entre  $C_a$  et  $C_b$  puisque nous choisissons  $\varepsilon < a^2 - b^2$ . La répétition de  $TT_\varepsilon$  transforme  $C'_a$  en  $C''_a$ , courbe simple fermée. D'autre part,  $TT_\varepsilon$  est une transformation biunivoque et continue de l'anneau  $R$  en l'anneau  $R'$ , limité par  $C'_a$ ,  $C'_b$  et obtenu en contractant l'anneau  $R$  par la transformation  $T_\varepsilon$ . Puisque  $C'_a$  est situé à l'intérieur de  $R$  et entoure  $C_b$ , son image  $C''_a$  doit être située à l'intérieur de  $R'$  (par suite à l'intérieur de  $C'_a$ ) et entoure  $C'_b$ .

De plus, la transformation  $TT_\varepsilon$  transforme l'anneau formé par  $C_a C'_a$  (dans l'anneau  $R$ ) en un second anneau  $C'_a C''_a$  (dans  $R'$ ) qui est limité par la frontière intérieure  $C'_a$  du premier. Si  $C''_a$  est situé entièrement dans  $R$ , il entourera  $C_b$  ainsi que  $C'_b$ , et l'image  $C'''_a$  de  $C''_a$  dans la transformation  $TT_\varepsilon$  sera une courbe simple située à l'intérieur de  $C''_a$  et entourant  $C'_b$ . Ainsi  $C''_a C'''_a$  formeront la frontière du troisième anneau qui se trouve limité par la frontière intérieure  $C''_a$  du second. Ce procédé peut être continué de manière à former des courbes simples  $C'_a, C''_a, \dots$  chacune à l'intérieur de la précédente, et des anneaux correspondants  $C_a C'_a, C'_a C''_a, \dots$ , tant que les courbes obtenues sont situées entièrement dans  $R$  et non pas, en partie ou en entier, à l'intérieur de  $C_b$ .

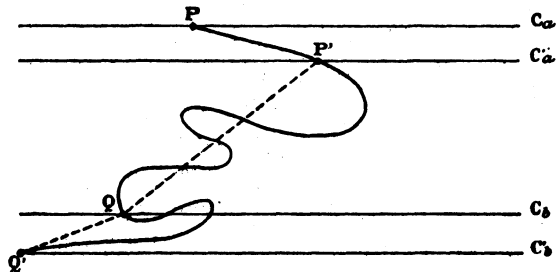
L'aire de l'anneau  $C_a C'_a$  est  $\pi\varepsilon$ , et, puisque les transformations  $T, T_\varepsilon$  conservent chacune les aires, elle sera égale à celles des anneaux images  $C'_a C''_a, C''_a C'''_a, \dots$ . Cette série d'anneaux ne peut se

terminer que si l'on atteint une courbe  $C_a^{(n)}$  ( $n \geq 2$ ) dont une partie au moins est située à l'intérieur du cercle  $C_b$ . Mais pour tout nombre  $l$ , l'aire comprise entre  $C_a$  et  $C_a^{(l)}$  est  $\pi l \epsilon$ , quantité qui dépasse l'aire de  $R$  si  $l$  est suffisamment grand. Il en résulte qu'il existe une courbe  $C_a^{(n)}$ . Par suite, nous pouvons trouver un point  $P$  de  $C_a$  dont la  $n^{\text{ième}}$  image tombe à l'intérieur du cercle  $C_b$ .

Revenons maintenant à la bande  $S$  et à une des représentations de  $P$  sur le côté supérieur  $C_a$  de la bande.  $C'_a$  est ici représentée par une ligne droite, au-dessous de  $C_a$  à la distance  $\epsilon$ , et  $C''_a, C'''_a, \dots$  sont chacune représentées par une courbe simple ouverte, qu'on obtient tout entière par répétition d'une de ses sections  $[2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi]$  et qui s'étend à l'infini à droite et à gauche.

Les anneaux  $C_a C'_a, C'_a C''_a, \dots$  sont représentés par les bandes situées entre deux de ces courbes successives de  $S$ . Soit  $P'$  la première image de  $P$ , joignons  $PP'$  par une ligne droite qui sera située entièrement dans la bande  $C_a C'_a$ . Soit  $P'P''$  l'image de  $PP'$  dans la transformation  $TT_\epsilon$ ,  $P''P'''$  l'image de  $P'P''$  par cette même transformation, et ainsi de suite. Nous construisons ainsi les arcs  $PP', P'P'', \dots, P^{(n-1)}P^{(n)}$ , situés respectivement dans les bandes  $C_a C'_a, C'_a C''_a, \dots, C_a^{(n-1)} C_a^{(n)}$  de  $S$ , et le point final  $P^{(n)}$  du dernier tombe au-dessous du côté inférieur  $C_b$  de  $S$ .

Soit  $Q$  le premier point d'intersection de cette succession d'arcs avec la droite  $C_b$  (voir la figure). Il est évident que la courbe  $PQ$



formée par cette succession d'arcs est une courbe simple, car  $PP', P'P'', \dots$  sont des arcs simples situés dans les bandes successives  $C_a C'_a, C'_a C''_a, \dots$  dans  $S$ . De plus,  $PQ$  est entièrement situé entre  $C_a$  et  $C_b$ .

L'image  $P'Q'$  de  $PQ$  dans la transformation  $TT_\epsilon$  est formée

de  $P'Q$  et d'un arc simple  $QQ'$ , image de l'arc  $Q^{-1}Q$ , si  $Q^{-1}$  est le point qui, par la transformation  $TT_{\varepsilon}$ , donne le point  $Q$ . L'arc  $QQ'$  étant l'image de points de  $R$  est situé entièrement au-dessous de  $C'_a$ ; et le point final  $Q'$  est naturellement sur  $C'_b$ . De plus,  $QQ'$  n'a pas d'autre point que  $Q$  en commun avec  $PQ$ . En effet, si un tel point existait, il serait sur  $P'Q$  : faisant la transformation inverse de  $TT_{\varepsilon}$ , nous voyons que  $Q^{-1}Q$  aurait un point autre que  $Q^{-1}$  en commun avec  $PQ^{-1}$ , ce qui n'est pas possible puisque  $PQ$  n'a pas de point multiple. Ainsi  $PQ'$  est une courbe simple.

La transformation  $TT_{\varepsilon}$  change l'arc  $PQ$  de  $PQ'$  en l'arc  $P'Q'$  de  $PQ'$  et a pour effet d'avancer chaque point de  $PQ$  le long de  $PQ'$ . En ce sens, la courbe  $PQ$  est *invariante* par la transformation.

D'après les propriétés de  $T$  et de  $T_{\varepsilon}$ , nous sommes certains que  $P'$  a un  $x$  supérieur à celui de  $P$ , et que  $Q'$  a un  $x$  inférieur à celui de  $Q$ , ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

5. *La rotation du vecteur point-image auxiliaire sur la courbe invariante.* — Si un point  $B$  se déplace le long de  $PQ'$  de  $P$  à  $Q$ , il est clair que son image  $\overline{B'}$  dans la transformation  $TT_{\varepsilon}$  se déplace de  $P'$  à  $Q'$  le long de la même courbe et ne coïncide jamais avec  $B$ . Nous allons maintenant établir le fait presque évident intuitivement que la rotation correspondante du vecteur  $B\overline{B'}$  ainsi obtenu est égale à  $-\pi$  augmenté de la somme des deux angles aigus que font les droites  $PP'$  et  $QQ'$  avec l'axe des  $x$ .

Tout d'abord, il est clair que cette rotation ne peut différer de cette valeur que d'un multiple entier de  $2\pi$ . Le fait que la rotation a précisément la valeur dite dépend entièrement de considérations *d'analysis situs*; il résulte de ce qu'une déformation continue de la courbe  $PP'QQ'$ , les positions intermédiaires étant des courbes simples contenant  $P, P', Q, Q'$ , amène la courbe à coïncider avec la ligne brisée  $PP'QQ'$  (*voir* la figure).

Soit  $t$  un paramètre croissant quelconque sur la courbe  $PQ$  prenant les valeurs  $t_0, t'_0, t_1, t'_1$  aux points  $P, P', Q, Q'$  respectivement. Soit  $\tau(t)$  la valeur de ce paramètre pour  $\overline{B'}$ ,  $t$  étant sa valeur pour  $B$ .

Il est clair que  $\tau(t)$  est une fonction continue croissante de



$t(t_0 \leq t \leq t_1)$  qui a la propriété  $\tau(t) > t$ . Considérons maintenant une courbe simple variée quelconque pour laquelle le paramètre  $t$  est choisi de manière à prendre les valeurs  $t_0, t'_0, t_1, t'_1$  aux mêmes points  $P, P', Q, Q'$  respectivement <sup>(1)</sup>. Si la distance entre tout point de la courbe variée et le point de  $PQ$  qui correspond à la même valeur du paramètre est uniformément petite, le vecteur correspondant  $\overline{BB'}$  le long de la courbe variée subira la même rotation totale que le long de  $PQ$ , puisque les positions initiale et finale sont les mêmes dans l'un et l'autre cas et que les différences angulaires de ces vecteurs dans toutes les positions intermédiaires sont uniformément petites.

Il résulte de ce raisonnement que nous pouvons déformer la courbe  $PP'QQ'$  d'une manière continue en prenant comme positions intermédiaires une série quelconque de courbes simples contenant les mêmes quatre points  $P, P', Q, Q'$ , pourvu que sur les courbes variées le paramètre soit convenablement choisi : la rotation totale de  $\overline{BB'}$  n'en sera pas altérée.

La courbe  $PQ$  est située entièrement dans  $S$ , de sorte que la ligne droite  $QQ'$ , étant en dehors de  $S$ , ne coupera pas la courbe  $PQ$ . Il est donc clair qu'on peut déformer d'une manière continue l'arc  $QQ'$  de manière à l'amener sur la droite  $QQ'$ , sans faire sortir la courbe  $QQ'$  de la bande comprise entre  $C'_a$  et  $C'_b$  : en effet, le continuum formé par cette bande où l'on a pratiqué une coupure suivant la courbe  $P'Q$  est simplement connexe, et par suite toute courbe simple de ce continuum qui joint  $QQ'$  peut être déformée d'une manière continue en une autre courbe simple quelconque par une série d'arcs simples n'ayant pas d'autres points communs que  $QQ'$  avec la frontière de la bande sectionnée.

D'autre part, l'arc  $P'Q$  peut être déformé d'une manière continue par une suite d'arcs joignant  $P'$  à  $Q$  dans la bande  $C'_a C'_b$  qui contient  $P'Q$  tout entière, de manière à obtenir la ligne droite  $P'Q$ , d'autant que les segments  $PP'$  et  $QQ'$  n'empiètent pas sur la bande  $C'_a C'_b$ .

Donc la rotation de  $\overline{BB'}$ , pour sa première suite de positions, est la même exactement que pour la ligne brisée formée des trois

---

<sup>(1)</sup> Je donne aussi le nom de « courbe simple variée » à toute courbe simple correspondant à une même position géométrique, mais à un paramètre différent.

segments  $PP'$ ,  $P'Q$ ,  $QQ'$ . La rotation le long de cette ligne brisée, depuis la position initiale jusqu'à la position finale, est évidemment  $-\pi$  augmenté de la somme des angles aigus que font les vecteurs  $PP'$  et  $QQ'$  avec l'axe des  $x$ . c. q. f. d.

Dans la première suite de positions,  $\overline{B'}$  s'obtient en appliquant à  $B$  la transformation  $TT_\varepsilon$ . Si les coordonnées de  $B$  sont  $(x, y)$ , celles de  $\overline{B'}$  sont  $(\overline{x'}, \overline{y'})$  et la rotation de  $B\overline{B'}$  est mesurée par la modification qu'éprouve la fonction  $\overline{\omega}(x, y)$  quand  $(x, y)$  se déplace de  $P$  en  $Q$  le long de la courbe invariante  $PQ$ .

Considérons la branche continue  $\overline{\omega}_1(x, y)$  de cette fonction qui prend au point  $P$  la valeur opposée à celle de l'angle aigu que fait le vecteur  $PP'$  avec l'axe des  $x$ . Au point  $Q$  sa détermination aura la valeur  $\pi$  augmentée de l'angle aigu que fait le vecteur  $QQ'$  avec l'axe des  $x$ .

**6. La rotation du vecteur point-image pour la transformation  $T$ .** — Considérons maintenant la branche continue  $\omega_1(x, y)$  de la fonction  $\omega(x, y)$  qui, le long du côté supérieur  $C_a$  de  $S$ , prend la valeur zéro.

Ces deux fonctions  $\overline{\omega}_1(x, y)$  et  $\omega_1(x, y)$  diffèrent de moins de  $\frac{\pi}{2}$  au point  $P$ , et sont par suite des branches de  $\overline{\omega}(x, y)$  et  $\omega(x, y)$  associées conformément à l'inégalité (5) qui subsiste dans tout  $S$ . De plus, on a vu que la valeur finale de la fonction  $\overline{\omega}_1(x, y)$  diffère de  $-\pi$  de moins de  $\frac{\pi}{2}$  en  $Q$ , de sorte que  $\omega_1(x, y)$  diffère de  $-\pi$  de moins de  $\pi$  en ce même point  $Q$ .

Mais toute branche de la fonction  $\omega(x, y)$  doit être égale, comme on l'a vu, à un multiple impair fixe de  $\pi$  le long de  $C_b$ . Donc cette fonction  $\omega_1(x, y)$  doit avoir la valeur  $-\pi$  en  $Q$  et par suite en tout point de  $C_b$ .

La variation de  $\omega_1(x, y)$  est par suite  $-\pi$  lorsque le point  $(x, y)$  se déplace d'une manière arbitraire d'un point de  $C_a$  à un point de  $C_b$ . En d'autres termes, *si nous déplaçons  $B$  d'une manière quelconque de  $C_a$  à  $C_b$  dans  $S$  et si  $B'$  est l'image de  $B$  dans la transformation  $T$ , la rotation totale du vecteur  $BB'$  sera précisément  $-\pi$ .*

**7. Achèvement de la démonstration.** — Considérons mainte-

nant la transformation  $T^{-1}$  inverse de la transformation  $T$ , qui est en tous points semblable à  $T$ , sauf que les points de  $C_a$  et de  $C_b$ , et par suite ceux des deux bords de  $S$ , sont déplacés dans des directions inverses. Par symétrie, le vecteur  $BB'$ , qui joint  $B'$  à son image  $B$  (dans la transformation  $T^{-1}$ ) doit maintenant tourner d'un angle  $\pi$  quand  $B$  et  $B'$  se déplacent de  $C_a$  à  $C_b$ .

Le vecteur  $B'B$  et le vecteur  $BB'$  sont de sens contraires. Mais la rotation actuelle des vecteurs  $BB'$  et  $B'B$  est naturellement une seule et même quantité, de sorte que nous sommes parvenus à une contradiction. Le théorème est donc complètement démontré.

8. *Généralisations du théorème.* — Dans l'énoncé de son théorème Poincaré fait l'hypothèse qu'il existe un invariant intégral  $\int \int P(x, y) dx dy$ , [ $P(x, y) > 0$ ], qui n'est pas nécessairement l'invariant des aires. Cependant nous pouvons, par un changement convenable de coordonnées,  $(x, y)$  en  $(\xi, \eta)$ , changer cet invariant intégral en l'invariant, plus simple, des aires.

Soient  $\eta = \text{const.}$  les cercles concentriques à  $C_a$  et  $C_b$ , et soit choisi le nombre  $\eta(y)$  pour chaque cercle, de sorte que lorsqu'un point se déplace de  $C_b$  à  $C_a$  l'intégrale double prise pour l'anneau compris entre  $C_b$  et le cercle concentrique passant par le point mobile soit égale à  $\eta$  :

$$\eta(y) = \int_{b^2}^y \left[ \int_0^{2\pi} P(x, y) dx \right] dy.$$

Cette fonction  $\eta(y)$  est évidemment continue et croissante et a une dérivée positive continue, à savoir

$$\frac{d\eta}{dy} = \int_0^{2\pi} P(x, y) dx.$$

En employant une manière de parler un peu inexacte, on peut dire que les courbes  $\eta$  sont placées de manière à mesurer des accroissements égaux de  $\int \int P(x, y) dx dy$  à l'aide d'accroissements égaux de  $\eta$ . Maintenant, dans le même sens inexact, choisissons les courbes  $\xi$  de manière à mesurer des augmentations égales de la même intégrale double entre les courbes  $\eta$  successives et la ligne  $x = 0$ .

On peut voir de la manière suivante qu'il est possible de choisir ainsi les courbes  $\xi = \text{const.}$  : Soit  $x = f(y)$  une courbe quelconque située dans  $R$ , joignant  $C_a$  à  $C_b$  et telle que l'aire comprise entre  $x = 0$ , cette courbe, le cercle  $C_b$  et le cercle  $y = \text{const.}$  soit constamment proportionnelle à  $\eta(y)$  :

$$\int_{b^2}^y \left[ \int_0^{f(y)} P(x, y) dx \right] dy = \frac{k}{2\pi} \eta(y).$$

En raison des propriétés connues de  $\eta(y)$ , cette équation est équivalente à

$$(6) \quad \int_0^{f(y)} P(x, y) dx = \frac{k}{2\pi} \frac{d\eta}{dy}.$$

Pour un  $k$  donné, la quantité  $f(y)$  est visiblement une fonction uniforme continue de  $y$ , puisque  $P(x, y)$  et  $\frac{d\eta}{dy}$  sont positives et continues. De plus, un accroissement de  $k$  accroît  $f(y)$  d'une manière continue. Nous obtenons ainsi une famille de courbes qui ne se coupent pas  $x = f(y)$  et qui, de même que les cercles  $\eta = \text{const.}$ , remplissent l'anneau  $R$ . Il est nécessaire de remarquer que  $x = 0$  correspond à  $k = 0$ , et que  $x = 2\pi$  est la courbe obtenue pour  $k = 2\pi$ , d'après la définition de  $\eta(y)$ . Nous prendrons la quantité  $k$  ainsi déterminée comme coordonnée  $\xi$  d'un point quelconque de la courbe  $x = f(y)$ .

Nous avons ainsi des coordonnées  $(\xi, \eta)$  pour lesquelles l'invariant intégral est l'invariant  $\iint d\xi d\eta$ . Prenant alors  $(\xi, \eta)$  comme coordonnées polaires modifiées d'un point dans un nouveau plan, nous trouvons que, exprimée avec ces coordonnées,  $T$  a toutes les propriétés supposées pour la transformation  $T$  du théorème. Nous en concluons comme précédemment qu'il y a au moins deux points invariants.

On peut encore généraliser le théorème en supposant seulement que  $C_a$  et  $C_b$  sont des courbes simples fermées quelconques, l'une entourant l'autre, de manière à limiter un anneau  $R$ ; nous pouvons encore énoncer un théorème semblable, car nous pouvons faire une transformation préliminaire (une représentation conforme par exemple), de manière à changer ces courbes en cercles concentriques, l'invariant intégral changeant alors simplement de

forme. Il peut être ici nécessaire de considérer avec soin la nature de l'invariant intégral près des frontières après la transformation de coordonnées.

Finalement, nous pouvons permettre à la fonction  $P(x, \gamma)$  de s'annuler en quelques points des courbes  $C_a$  et  $C_b$ . Sous certaines restrictions, il est certain que dans ce cas limite il y aura encore des points invariants.

9. *Méthode de Poincaré.* -- Il est intéressant de remarquer que Poincaré ne se sert que d'une seule propriété, conséquence de l'existence d'un invariant intégral, à savoir qu'aucun continuum situé dans  $R$  ne peut être transformé en une partie de lui-même par la transformation  $T$  (*loc. cit.*, p. 377).

Il semble improbable que cette condition soit équivalente à celle de l'existence d'un invariant intégral. L'existence d'un invariant intégral est un fait qui est plus intimement lié à la démonstration que j'ai donnée ci-dessus. Je ne sais pas si l'on aurait un théorème exact en substituant à cette condition relative à un invariant intégral la condition plus large énoncée plus haut.

---