

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

Généralisation d'un théorème de M. Landau

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 340-346

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__340_0

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

(²) *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (Sitzungsberichte der Königlich. preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

correspondante d'aucune dérivée. Si nous faisons n_1 dérivations successives, nous obtenons une équation qui, pour les valeurs $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, devient

$$(7) \quad (u')^{n_1} \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} + \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} = 0.$$

Supposons que

$$(8) \quad \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} \neq 0,$$

alors il doit en être de même de la valeur $\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}}$, parce que, dans le cas contraire, nous n'aurions pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$ aucune valeur finie de la dérivée u' et, par conséquent, il n'y aurait pas de branche de $u = \Phi(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z_1 = 0$ et prenant pour $z_1 = 0$ la valeur α_{10} .

Or, nous avons

$$\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} = (n_1)! (b_1 \alpha_{10}^{n-1} + b_2 \alpha_{10}^{n-2} + \dots + b_n) = (1.2.3 \dots n_1) q(\alpha_{10}),$$

et, par conséquent, l'hypothèse (8) est équivalente à l'hypothèse

$$(9) \quad q(\alpha_{10}) = b_1 \alpha_{10}^{n-1} + b_2 \alpha_{10}^{n-2} + \dots + b_n \neq 0.$$

Si nous posons

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

le nombre α_{10} est une racine du polynome $p(x)$ et, par conséquent, notre hypothèse (9) consiste en ce que les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ ne doivent avoir aucune racine commune. Avec cette hypothèse la valeur α_{11} sera tirée de l'équation (7) qui peut s'écrire

$$(10) \quad p^{(n_1)}(\alpha_{10}) (u')^{n_1} + (1.2.3 \dots n_1) q(\alpha_{10}) = 0.$$

Nous en concluons que le nombre α_{11} ne dépend que de α_{10} et des nombres $n_1, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n$ et n ; d'autre part, le nombre α_{10} étant une racine du polynome $p(x)$, ne dépend que des $n, a_1, a_2, \dots, a_n$; donc, le coefficient α_{11} ne dépend que des nombres $n, n_1; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ [et nullement des autres coefficients des séries (5)], et il en est de même des coefficients analogues $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{m1}$: c'est-à-dire, le coeffi-

cient $z_k (k = 1, 2, 3, \dots, m)$ ne dépend que des nombres $n, n_k; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, tandis que les coefficients $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{m0}$, qui sont des racines du polynome $p(x)$, ne dépendent que des nombres $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que, si les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ n'ont aucune racine commune, le rayon R indiqué dans le théorème I ne dépend que des nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ des degrés ⁽¹⁾ $n_1, n_2, \dots, n_m$ des systèmes circulaires et du nombre n des branches de la fonction multiforme donnée.

Remarque. — Si nous désignons par z_1 et ζ deux valeurs de $z^{\frac{1}{n_1}}$, on aura $\zeta = z_1 r$, où r est une $n_1^{\text{ième}}$ racine de l'unité et, par conséquent, la première série (1) se transforme, au fond, par la substitution $z^{\frac{1}{n_1}} = \zeta = z_1 r$ à n_1 fonctions holomorphes :

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} z_1 + \dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_1 z_1 + \dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_2 z_1 + \dots, \\ \dots\dots\dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_{n_1-1} z_1 + \dots, \end{aligned}$$

où les $1, r_1, r_2, \dots, r_{n_1-1}$, sont les n_1 racines de l'unité.

Donc aux n_1 branches du premier des systèmes circulaires (1) correspondent ces n_1 branches holomorphes en $z_1 = 0$ de la fonction $u = \Phi(z_1)$; c'est pour cela que l'équation (10) est du degré n_1 et donne, pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, n_1 valeurs de la dérivée u' , qui sont les $n_1^{\text{èmes}}$ racines d'un nombre.

Nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie à n branches ⁽²⁾ dans le voisinage de $z = 0$, déterminée par*

⁽¹⁾ Qui sont ici égaux aux degrés de multiplicité des racines du polynome $p(x)$, puisque nous avons

$$p^{(n_1)}(\alpha_{10}) \neq 0, \quad p^{(n_2)}(\alpha_{20}) \neq 0, \quad p^{(n_3)}(\alpha_{30}) \neq 0, \quad \dots, \quad p^{(n_m)}(\alpha_{m0}) \neq 0,$$

par suite de l'hypothèse (9).

⁽²⁾ Si la fonction possède une infinité de branches, nous envisageons un nombre

généralisations du théorème de M. Picard (C. R. Acad. Sc., t. CXLI, 1905, p. 1213-1215)].

Les nombres $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \dots, \alpha_{m0}$ sont les racines du polynome $p(x)$ et le module des nombres $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{m1}$ est donné par la formule

$$|\alpha_{k1}| = \left| \sqrt[n_k]{\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n_k) q(\alpha_{k0})}{p^{(n_k)}(\alpha_{k0})}} \right| \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m),$$

où $p^{(n_k)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre n_k du polynome $p(x)$; on sait que les nombres $\varphi(\alpha_{k0}, \alpha_{k1})$ ne dépendent que du module de α_{k1} .

Il faut remarquer que notre théorème II est beaucoup plus intéressant que le premier, parce qu'il exprime le rayon R en fonction des nombres donnés $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; n, n_1, n_2, \dots, n_m$, au lieu des nombres $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1}$ qui sont difficiles à trouver et exigent la connaissance des systèmes circulaires des branches qui se permutent autour du point $z = 0$. On sait que la détermination des degrés de multiplicité des racines d'un polynome $p(x)$ est un problème élémentaire de l'Algèbre facile à résoudre, tandis que la détermination des systèmes circulaires ⁽¹⁾ se fait par une méthode de Puiseux qui est assez compliquée (Voir É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 348-360).

Nous tenons ici à appeler l'attention du lecteur sur le fait que la méthode que nous avons suivie pour établir le théorème II nous a donné l'occasion d'obtenir le résultat suivant :

Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie à n branches dans le voisinage de $z = 0$, déterminée par l'équation

$$\begin{aligned} u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \dots + A_n(z) &= 0, \\ A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \dots, \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_n(z) &= a_n + b_n z + \dots \end{aligned}$$

Si les polynomes

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n, \\ q(x) &= b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Pour les fonctions algébriques.

n'ont aucune racine commune, les branches qui, pour $z = 0$, prennent la même valeur forment un seul système circulaire : c'est-à-dire à chaque racine du polynôme $p(x)$ correspond un seul système circulaire formé par des branches dont le nombre est égal au degré de multiplicité de la racine.

4. Si la fonction donnée $u = \varphi(z)$ du théorème II est holomorphe, nous pouvons prendre $n = 1$ et nous aurons

$$p(x) = x + a_1, \quad q(x) = b_1;$$

il faut donc supposer $b_1 \neq 0$ pour que les polynômes $p(x)$ et $q(x)$ n'aient aucune racine commune et cela suffit évidemment. Nous retombons ainsi au théorème de M. Landau, qui se présente parfaitement comme cas particulier de notre théorème II correspondant à la valeur $n = 1$.

En terminant ce travail, je tiens à faire une comparaison de ces résultats avec les autres que j'ai publiés dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences de Paris et les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Les théorèmes I et II de ce travail apportent au théorème de M. Landau une généralisation concernant seulement le point $z = 0$ qui peut être un point critique algébrique pour un ensemble fini de branches, tandis que les autres (publiés dans les *Comptes rendus* et les *Rendiconti*), apportent une généralisation plus étendue comme concernant tout le domaine, dans lequel on envisage les valeurs exceptionnelles, qui peut avoir des points critiques algébriques quelconques, mais elle est moins précise et moins fidèle à d'autres points de vue.
