

BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Équations algébriques et transcendentes dépourvues de racines réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 194-206

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__194_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET TRANSCENDANTES DÉPOURVUES
DE RACINES RÉELLES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

I. — ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES A TOUTES LES RACINES IMAGINAIRES.

1. Laguerre s'est à plusieurs reprises ⁽¹⁾ occupé du problème :
déterminer une suite de quantités

$$(1) \qquad \omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots,$$

⁽¹⁾ *Sur la théorie des équations numériques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 3^e série, t. IX, 1883; *Œuvres*, p. 4-47).

Sur quelques points de la théorie des équations numériques (*Acta mathematica*, t. IV, 1884; *Œuvres*, p. 185-206).

telles que

$$(2) \quad \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0$$

étant une équation algébrique *quelconque* à toutes les racines *réelles*, l'équation

$$(3) \quad \omega_0 \alpha_0 + \omega_1 \alpha_1 x + \dots + \omega_n \alpha_n x^n = 0$$

ait également toutes ses racines *réelles*. Il a donné plusieurs solutions particulières du problème, comme le sont, par exemple, les nombres ω_n fonction suivantes de n :

- 1° Polynomes en n n'ayant que des zéros réels négatifs;
- 2° Fonctions entières de n du genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels négatifs;
- 3° Fonctions $e^{-\alpha n^2}$, α étant un nombre réel négatif;
- 4° Produits d'un nombre arbitraire de fonctions 1°, 2°, 3°.

On peut se proposer le problème réciproque : *déterminer des suites (1) telles que (2) étant une équation algébrique quelconque, à toutes les racines IMAGINAIRES, l'équation (3) ait également toutes ses racines IMAGINAIRES.*

J'en trouve la solution simple et assez générale suivante :

Désignons par λ_{kn} l'intégrale définie

$$(4) \quad \lambda_{kn} = \int_{a_k}^{b_k} u_k r_k^n dt,$$

où les limites a_k et b_k sont arbitraires, mais réelles et indépendantes de n ; u_k et r_k sont deux fonctions arbitraires de la variable t , indépendantes de n , réelles dans l'intervalle (a_k, b_k) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle.

Le produit

$$(5) \quad \omega_n = \lambda_{1n} \lambda_{2n} \dots \lambda_{pn},$$

d'un nombre arbitraire des intégrales λ_{kn} fournit une solution du problème.

Il suffit manifestement de faire voir que

$$(6) \quad \omega_n = \lambda_{kn}$$

en est une solution. Or, dans ce cas, le premier membre de (3) se

laisse mettre sous la forme

$$(7) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k P(r_k x) dt,$$

$P(x)$ étant le premier membre de (2), ce qui démontre d'un coup la proposition, les fonctions u_k et $P(r_k x)$ ne changeant de signe pour aucune valeur réelle de t , comprise entre les limites d'intégration, ni aucune valeur réelle de x .

Dans l'expression de λ_{kn} on dispose des éléments u_k, r_k, a_k, b_k . En les faisant varier, ainsi que les paramètres qui peuvent y figurer, on aura un nombre illimité de suites λ_{kn} , lesquelles, ainsi que leurs produits en nombre quelconque, jouissent de la propriété énoncée et fournissent des suites (1) cherchées.

Voici quelques expressions pouvant jouer le rôle de λ_{kn} :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a+n} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-nt} dt, \\ \frac{\Gamma(a)}{(n+1)^{a+1}} = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t} \right)^a t^n dt, \\ \frac{b-a}{(a+n)(b+n)} = \int_0^\infty (e^{-bt} - e^{-at}) e^{-nt} dt, \\ 1.2.3\dots n = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt, \\ \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n+4)} = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^2 \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^n dt, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-bnt^2} dt, \end{array} \right.$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

2. Dans un travail antérieur (1) j'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une équation algébrique

$$(9) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0,$$

(1) *Une classe remarquable de séries entières* (Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908, p. 36-43).

d'un degré *arbitraire* pour jouir des propriétés suivantes :

- 1° Que toutes ses racines soient *réelles*;
- 2° Que si l'on néglige un nombre *arbitraire* de derniers termes dans son premier membre, l'équation restante ait encore toutes ses racines *réelles*.

Ce qui précède fournit la possibilité de former des classes générales d'équations algébriques d'un ordre pair *arbitraire* jouissant des propriétés suivantes, réciproques aux précédentes :

- 1° Que l'équation ait toutes ses racines *imaginaires*;
- 2° Que si l'on néglige dans son premier membre un nombre pair *arbitraire* de derniers termes, l'équation restante ait encore toutes ses racines *imaginaires*.

Telles sont, par exemple, les équations

$$(9') \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n} = 0,$$

$$(10) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{2n}}{1.2 \dots 2n} = 0.$$

Et d'une manière générale, en appelant *équations* E_{2n} toute équation algébrique jouissant des propriétés 1° et 2°, *toute équation*

$$(11) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \dots + \omega_{2n} x^{2n} = 0,$$

où ω_n est une expression (5), est une équation E_{2n} .

On le voit en prenant pour

$$(12) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

l'équation (9). Telles seraient, par exemple, les équations

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \dots + \frac{x^{2n}}{a+2n} = 0,$$

$$1 + \frac{x}{2^{a+1}} + \frac{x^2}{3^{a+1}} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{a+1}} = 0,$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{x}{(a+1)(b+1)} + \dots + \frac{x^{2n}}{(a+2n)(b+2n)} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x}{\sqrt{a+b}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{a+2nb}} = 0,$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

De même : toute équation

$$(13) \quad \omega_0 + \frac{\omega_1}{1}x + \frac{\omega_2}{1.2}x^2 + \dots + \frac{\omega_{2n}}{1.2 \dots 2n}x^{2n} = 0$$

est une équation E_{2n} . On le voit en prenant pour (12) l'équation (10).

Et d'une manière générale : l'équation

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^{2n} = 0,$$

étant une équation E_{2n} , l'équation

$$(14) \quad \omega_0 a_0 + \omega_1 a_1x + \dots + \omega_{2n} a_{2n}x^{2n} = 0$$

en est aussi une.

3. Dans le cas où r_k garde un signe invariable pour t variant de a_k à b_k , les équations E_{2n} de la forme

$$(15) \quad \lambda_{k0} + \lambda_{k1}x + \dots + \lambda_{k,2n}x^{2n} = 0,$$

ont une distribution particulière de leurs racines dans le plan de la variable x .

Supposons, pour fixer les idées, que r_k soit positif et désignons par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ les intervalles numériques, indépendants des coefficients de l'équation, tous contenus dans l'intervalle de 0 à 2π et tels que pour toute valeur θ contenue dans δ_k le produit

$$(16) \quad \sin \theta \sin 2n\theta$$

soit positif et le produit

$$(17) \quad \sin \theta \sin (2n+1)\theta$$

soit négatif. Alors :

Les arguments des racines de (15) se trouvent toujours en dehors des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$

En effet, le premier membre de l'équation (15) se laisse mettre sous la forme.

$$(18) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1 - (r_k x)^{2n+1}}{1 - r_k x} dt,$$

et sa partie imaginaire pour $x = \rho e^{i\theta}$ sera

$$(19) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{\Phi dt}{P^2 + Q^2},$$

où

$$(20) \quad \begin{cases} P = 1 - r_k \rho \cos \theta, \\ Q = r_k \rho \sin \theta. \end{cases}$$

$$\Phi = r_k \rho \sin \theta - (r_k \rho)^{2n+1} \sin(2n+1)\theta + (r_k \rho)^{2n+2} \sin 2n\theta.$$

Cette partie imaginaire ne saurait s'annuler pour aucune valeur positive de ρ lorsque θ est compris dans un des intervalles δ_k , ce qui démontre la proposition.

Dans le cas où r_k est négatif, les intervalles δ_k doivent être remplacés par ceux dans lesquels le produit (16) est *négatif* et le produit (17) *positif*.

II. — ÉQUATIONS TRANSCENDANTES SANS RACINES RÉELLES.

4. Il existe des séries de puissances

$$(21) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

jouissant de cette propriété remarquable d'avoir tous leurs zéros *réels* et que, de plus, le polynôme formé d'un nombre arbitraire de leurs premiers termes ait également tous ses zéros *réels*.

J'ai donné dans le travail cité les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une série (21) pour qu'elle jouisse de pareilles propriétés.

Il existe, de même, des séries (21) jouissant de la propriété réciproque à la précédente : *de n'avoir, ni elle-même ni le polynôme formé d'un nombre impair arbitraire de ses premiers termes, aucun zéro réel*, la série dans son cercle de convergence, le polynôme dans tout le plan de la variable x .

L'exemple le plus simple est fourni par les séries élémentaires

$$(22) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$(23) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

En appelant *séries S* les séries pareilles, les suites précédentes

$$(24) \quad \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$$

fournissent la possibilité d'en former un nombre illimité.

Si

$$(25) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

est une série S, la série

$$(26) \quad a_0 \omega_0 + a_1 \omega_1 x + a_2 \omega_2 x^2 + \dots,$$

dans le cas où elle converge dans une certaine circonférence, en est aussi une.

Car, en partant d'une série S déterminée, par exemple de (22) ou (23), ou, d'une manière générale, de (25), la série

$$(27) \quad \lambda_{k0} - \lambda_{k1} x + \lambda_{k2} x^2 + \dots,$$

où λ_{ku} est une expression (4), se laisse exprimer par l'intégrale définie

$$(28) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k f(r_k x) dt.$$

Comme u_k et $f(r_k x)$ ne s'annulent pour aucune valeur de t comprise entre les limites d'intégration et aucune valeur de x pour laquelle la série $f(r_k x)$ converge et l'intégrale (28) ait un sens, la série (27), et par suite aussi la série (26), sont des séries S.

En désignant par M_k la plus grande valeur absolue que prend la fonction r_k pendant que t varie de a_k à b_k , on a

$$(29) \quad \lambda_{kn} < \lambda_{k0} M_k^n,$$

et par suite la série (27) aura son rayon de convergence au moins égal à

$$(30) \quad \frac{R}{M_k},$$

R désignant le rayon de convergence de (25). Il s'ensuit que le rayon de convergence de la série (26) est au moins égal à

$$(31) \quad \frac{R}{M},$$

où M désigne le produit $M_1 M_2 \dots M_p$ et que son coefficient de x^n est plus petit en valeur absolue que

$$(32) \quad \mu \alpha_n M^n,$$

où α_n désigne la valeur absolue du coefficient α_n , et μ est la constante égale à la valeur absolue de ω_0 . Le module de la série (26), pour toute valeur de x de module ρ plus petit que (31), est inférieur à

$$(33) \quad \mu F(M\rho),$$

où

$$(34) \quad F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

Ainsi, toute série S de la forme

$$(35) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots$$

a son rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{M}$ et son module inférieur à

$$\frac{\mu}{1 - M\rho};$$

toute série S de la forme

$$(36) \quad \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

converge dans tout le plan de x et a son module inférieur à

$$\mu e^{M\rho}.$$

5. Une limite inférieure des modules des zéros d'une série de Taylor quelconque

$$(37) \quad \varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

est fournie par la valeur

$$(38) \quad \xi = \frac{|A_0|}{\sqrt{N}},$$

où N est la plus petite valeur que prend la fonction

$$(39) \quad v(x) = \frac{1}{x^2} \sum_0^{\infty} e_n x^{2n},$$

pendant que x varie par valeurs réelles de 0 jusqu'au rayon de convergence de la série (37), les e_n étant des valeurs positives

égales ou supérieures aux carrés de modules des coefficients correspondants A_n ⁽¹⁾.

Pour la série S

$$(40) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots,$$

d'après ce qui précède, on peut prendre

$$(41) \quad e_n = \mu^2 M^{2n};$$

la fonction $v(x)$ sera

$$(42) \quad \frac{\mu^2}{(1 - M^2 x^2) x^2},$$

et elle atteint son minimum pour la valeur

$$z = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

inférieure au rayon de convergence $\frac{1}{M}$ de la série (40). Ce minimum étant

$$4\mu^2 M^2,$$

on trouve

$$\xi = \frac{1}{2M}.$$

Aucune série (40) n'a donc des zéros à l'intérieur de la circonférence de rayon $\frac{1}{2M}$ décrite autour de $x = 0$.

Pour les polynômes S_{2n} obtenus en arrêtant la série (40) à son terme de degré $2n$, la fonction $v(x)$ sera

$$(43) \quad v(x) = \frac{\mu^2}{x^2} \frac{1 - (Mx)^{2n+1}}{1 - M^2 x^2},$$

de sorte qu'une limite inférieure des modules des zéros de S_{2n} est donnée par

$$\frac{\mu}{\sqrt{N}},$$

N étant le minimum de (43).

⁽¹⁾ *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX, 1902.

6. Pour les séries S plus particulières, de la forme

$$(44) \quad \varphi(x) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1}x + \lambda_{k2}x^2 + \dots,$$

on peut montrer qu'elles n'ont point de zéros, ni réels ni imaginaires, inférieurs, en module, à la valeur $\frac{1}{M_k}$.

En effet, la série se laisse écrire sous la forme

$$(45) \quad \varphi(x) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{u_k}{1 - r_k x} dt,$$

et sa partie réelle pour $x = \rho e^{\theta i}$ sera

$$(46) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1 - r_k \rho \cos \theta}{P^2 + Q^2} dt,$$

P et Q étant les valeurs précédentes (20).

La valeur absolue de

$$r_k \rho \cos \theta, \quad \text{pour} \quad \rho < \frac{1}{M_k},$$

étant plus petite que 1, l'intégrale (46), et par suite aussi la fonction $\varphi(Z)$, ne saurait s'annuler pour aucune valeur dont le module serait inférieur à $\frac{1}{M_k}$.

Il s'ensuit que les fonctions

$$\frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{et} \quad \log \varphi(x)$$

sont aussi développables en série de puissances convergentes dans la circonférence au moins égale à $\frac{1}{M_k}$.

Telles seraient, par exemple, les séries

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{x^n}{a+n}, & \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+1)^a}, \\ \sum_0^\infty \frac{x^n}{(a+n)(b+n)}, & \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{a+bn}}, \\ & \quad \sum_0^\infty \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n+2)} x^n. \end{aligned}$$

La classe (44) des séries S se présente comme éléments de réduction pour les intégrales définies

$$(47) \quad \int_a^b R(t, x) dt,$$

où R est une fonction rationnelle de x à coefficients fonctions de t .
En désignant par

$$\theta_1(x), \quad \theta_2(x), \quad \theta_3(x), \quad \dots,$$

les diverses intégrales

$$\theta_k(x) = \int_a^b \frac{u_k}{1 - r_k x} dt,$$

jouant le rôle de fractions simples obtenues par la décomposition de la fraction rationnelle $R(t, x)$, l'intégrale (47) se laisse toujours exprimer sous la forme de la somme d'un polynôme en x et d'une combinaison linéaire et homogène de termes

$$\begin{aligned} \theta_1(x), \quad x \frac{d\theta_1}{dx}, \quad x^2 \frac{d^2\theta_1}{dx^2}, \quad \dots, \\ \theta_2(x), \quad x \frac{d\theta_2}{dx}, \quad x^2 \frac{d^2\theta_2}{dx^2}, \quad \dots, \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \end{aligned}$$

en nombre limité ⁽¹⁾.

Toutes les fois qu'à une fraction simple correspondent les fonctions u_k et r_k réelles dans l'intervalle (a, b) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle, la fonction correspondante $\theta_k(x)$ représente une série S de la classe (44). Les séries (44) se présentent donc comme éléments simples pour les intégrales (47).

C'est, par exemple, ainsi que la série

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{a + bn}}$$

joue le rôle d'élément simple pour toute intégrale

$$\int_0^{\infty} R(t, x) dt,$$

(1) Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXII, 1904.

pour laquelle existe une fraction simple avec

$$u_k = e^{at^k}, \quad r_k = e^{bt^k},$$

a et b étant des constantes positives; que la série

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^a} \quad (a > 0)$$

joue ce rôle pour les intégrales

$$\int_0^1 R(t, x) dt,$$

pour lesquelles existe une fraction simple avec

$$u_k = \log \frac{1}{t}, \quad r_k = t, \quad \dots$$

7. Les séries S de la forme

$$(48) \quad \chi(x) = \lambda_{k0} + \frac{\lambda_{k1}}{1} x + \frac{\lambda_{k2}}{1.2} x^2 + \frac{\lambda_{k3}}{1.2.3} x^3 + \dots$$

sont représentables par des intégrales

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k x} dt,$$

et représentent des fonctions *entières* de x qui n'ont pas de zéros réels. Plus généralement, comme la partie réelle de $\chi(\alpha + \beta i)$, qui est

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k \alpha} \cos r_k \beta dt,$$

ne s'annule pour aucune valeur de β comprise entre

$$-\frac{\pi}{M_k} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{M_k},$$

la fonction $\chi(x)$ n'a aucun zéro dans la bande comprise dans le plan des x entre les deux droites

$$\beta + \frac{\pi}{M_k} = 0, \quad \beta - \frac{\pi}{M_k} = 0.$$

La série, par exemple

$$(49) \quad \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{xt \log \frac{1}{t}} dt,$$

appartenant à la classe (48) n'a pas de zéros dans la bande comprise entre les deux droites

$$\beta + \pi e = 0, \quad \beta - \pi e = 0.$$

Les séries (48) jouissent de propriétés présentant une grande analogie avec celles de la fonction élémentaire e^{ax} et ont fait objet de mes deux Notes ⁽¹⁾ antérieures. Je m'en occuperai aussi dans un travail qui paraîtra prochainement.

⁽¹⁾ *Sur des transcendentes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques* (C. R. Acad. Sc., t. CLVI, p. 1213); *Séries hypertrigonométriques* (C. R. Acad. Sc., t. CLVI).