BULLETIN DE LA S. M. F.

A. CHÂTELET

Contribution à la théorie des fractions continues arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. ALBERT CHÂTELET.

1. D'après la théorie des fractions continues arithmétiques, étant donné un nombre irrationnel positif $\frac{\alpha}{\beta}$, on peut en déduire une *suite unique* d'entiers (*quotients incomplets*),

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

positifs, *non nuls*, *sauf peut-être* a_0 définis par la propriété suivante : si l'on considère la fonction homographique de u

$$f_n(u) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{u}}}},$$

le nombre manifestement irrationnel $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ (*quotient complet*) défini par l'égalité

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = f_n\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$

est, quel que soit n, supérieur à 1. Il en résulte que la fraction (*réduite*)

$$\frac{P_n}{Q_n} = f_n(\infty)$$

a pour limite $\frac{\alpha}{\beta}$ lorsque n augmente indéfiniment.

Réciproquement, à toute suite d'entiers positifs correspond un nombre irrationnel unique ayant cette suite pour suite de ses quotients incomplets.

On sait l'importance des fractions continues; les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ constituent les *meilleures approximations rationnelles* du nombre $\frac{\alpha}{\beta}$. Il est théoriquement facile de déterminer les quotients incomplets successifs, le nombre a_i étant la *partie entière* de $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ $\left(\text{avec la convention } \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Pratiquement cette recherche est malaisée et, sauf un petit nombre de cas, on ne connaît pas les développements en fractions continues des nombres incommensurables usuels. On ne connaît pas non plus de règles pratiques permettant d'effectuer les opérations élémentaires (addition, soustraction, etc.) sur des nombres développés en fraction continue.

La présente étude est une modeste contribution à cet ordre de recherches. J'ai tâché d'y établir un procédé méthodique pour faire une transformation homographique à coefficients entiers d'une fraction continue. J'ai divisé ce travail en trois parties; dans la première j'ai exposé quelques relations de la théorie des substitutions linéaires avec celle des fractions continues, ce qui m'a conduit à des notations et à des procédés de calcul assez commodes. Dans la deuxième partie, j'ai exposé la méthode de calcul des quotients incomplets d'un transformé homographique d'un nombre donné. Enfin dans la troisième partie j'ai montré comment, dans certains cas, cette méthode pouvait conduire à des *lois de succession* des quotients incomplets de certains nombres, notamment des fonctions homographiques (à termes entiers) de $e^{\frac{2}{n}}$

Cette méthode de calcul, ainsi que quelques-unes de ses applications, avaient déjà fait l'objet d'une Note à l'Académie des Sciences [1]. J'y avais fait une légère omission que je suis heureux de pouvoir rectifier ici (*voir* n° **11**).

Enfin j'avais indiqué dans cette même note une propriété des approximations rationnelles de deux incommensurables liées ho-

---

[1] *Comptes rendus*, 21 mars 1910.

mographiquement. Je n'ai pas cru devoir la développer dans le présent article, quoiqu'elle soit une conséquence à peu près immédiate de la méthode de calcul exposée. Elle se rattacherait plutôt, en effet, aux fractions continues considérées comme méthodes d'approximation. Il y aurait alors lieu de faire une exposition systématique de la notion du *type* (1) de l'approximation d'un nombre irrationnel, notion à laquelle on est fatalement conduit par l'application des idées de M. Borel sur la *hauteur* des nombres et sur la croissance des fonctions (2).

I. — Substitutions linéaires et fractions continues.

2. La théorie des fractions continues est intimement liée à la théorie des substitutions linéaires qui permet d'en simplifier l'exposé et les calculs. Je vais rappeler brièvement quelques principes de cette théorie en même temps que les notations assez courantes que j'emploierai dans la suite.

Étant donnée une substitution linéaire de deux variables

$$\begin{aligned} x &= u y + v y', \\ x' &= u' y + v' y', \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$$

(x, x' anciennes variables; y, y' nouvelles), je la représenterai soit par une seule lettre, soit par le tableau (3) (sans barres verticales) des coefficients rangés dans le même ordre que les termes du déterminant précédent. La relation entre les couples de nombres (ou points) x, x'; y, y' sera indiquée par l'égalité symbolique

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \begin{matrix} u & v \\ u' & v' \end{matrix} \times \begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}.$$

Avec cette convention et d'après la règle ordinaire du produit

(1) J'emploie ce mot par analogie avec les *types de croissance* utilisés par M. Borel.

(2) *Journal de Liouville*, 1903. *Leçons sur la théorie de la croissance* (Chap. I et Chap. V).

(3) Pour une théorie générale des tableaux et ses applications aux formes, aux substitutions, etc., je renvoie à mon Mémoire (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911).

de deux substitutions, les deux égalités

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \begin{matrix} u & v \\ u' & v' \end{matrix} \times \begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} y \\ y' \end{matrix} = \begin{matrix} u_1 & v_1 \\ u'_1 & v'_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}$$

entraînent l'égalité symbolique

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \left(\begin{matrix} u & v \\ u' & v' \end{matrix} \times \begin{matrix} u_1 & v_1 \\ u'_1 & v'_1 \end{matrix}\right) \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \begin{matrix} uu_1 + vu'_1 & uv_1 + vv'_1 \\ u'u_1 + v'u'_1 & u'v_1 + v'v'_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}.$$

La règle pour faire le produit de deux substitutions représentées par des tableaux est en somme la même que pour faire le produit de deux déterminants, en associant les lignes du premier tableau aux colonnes du second; d'autre part les égalités symboliques sont soumises, au seul point de vue de la multiplication, aux règles ordinaires des égalités, en tenant compte toutefois de *l'ordre des facteurs* dans les produits.

3. Ceci posé, la relation homographique (1) peut être considérée comme résultant d'une substitution linéaire de α_n, β_n à α, β

$$(2) \qquad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} = \begin{matrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix}.$$

A priori les coefficients de cette substitution doivent vérifier les égalités

$$\frac{P_n}{Q_n} = f_n(\infty), \qquad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = f_n(0) = f_{n-1}(\infty),$$

ce qui justifie en partie leur notation identique à celle déjà employée pour les termes des réduites. Pour déterminer complètement ces coefficients ainsi que le numérateur et le dénominateur de chaque quotient complet, je supposerai que la relation homographique qui lie deux quotients complets successifs

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = a_p + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}} \qquad (a_p \textit{ entier positif})$$

résulte de la substitution linéaire [que j'appellerai substitution (a)]

$$(a) \qquad \frac{\alpha_p}{\beta_p} = \begin{matrix} a_p & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}} \qquad (a_p \textit{ entier positif}).$$

On en déduit l'expression de la substitution (2) sous forme d'un produit de substitutions (a) $\left(\text{en supposant } \frac{\alpha}{\beta} > 1\right)$

$$(\mathrm{A}) = \begin{matrix} \mathrm{P}_n & \mathrm{P}_{n-1} \\ \mathrm{Q}_n & \mathrm{Q}_{n-1} \end{matrix} = \prod_{i=0}^{i=n-1} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La propriété bien connue du module d'un produit de deux substitutions montre que cette substitution est *modulaire*

$$(\mathrm{P}_n \mathrm{Q}_{n-1} - \mathrm{P}_{n-1} \mathrm{Q}_n = \pm 1);$$

on en déduit que les fractions $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ sont irréductibles, ce qui justifie complètement la notation employée pour leurs termes.

On voit d'autre part que, si l'on a mis le nombre primitif sous forme d'un quotient de deux termes bien déterminés, chaque quotient complet sera aussi le rapport de deux nombres bien déterminés.

4. J'ai supposé $\frac{\alpha}{\beta}$ supérieur à 1; s'il est inférieur à 1, le premier quotient incomplet est nul et la substitution qui permet de passer de α, β à α_n, β_n est

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \prod_{i=1}^{i=n} \begin{matrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = (\sigma) \times (\mathrm{A}),$$

en désignant par (σ) la substitution $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$. C'est une substitution de même forme $(\sigma) \times (\mathrm{A})$ qui relierait un *quotient complet intermédiaire* à un quotient complet successif.

En se plaçant au point de vue des approximations, Serret [1] a introduit la notion de réduites intermédiaires. En imitant son procédé, on peut introduire, entre deux quotients complets consécu-

---

[1] *Algèbre supérieure*, 6e édit., t. I. Cf. aussi mon Mémoire cité Chap. II-V.

tifs $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$, $\frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}$, $a_p - 1$ quotients intermédiaires :

$$\frac{\alpha_{p+1}^h}{\beta_{p+1}^h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, a_p - 1),$$

lorsque le quotient incomplet a_p est supérieur à 1. Ils sont définis par les égalités symboliques

$$(3) \qquad \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{matrix} = \begin{matrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_{p+1}^h \\ \beta_{p+1}^h \end{matrix} \qquad (h = 1, 2, \ldots, a_p - 1),$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\begin{matrix} \alpha_{p+1}^h \\ \beta_{p+1}^h \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ a_p - h & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_{p+1} \\ \beta_{p+1} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha_{p+1}^h \\ \beta_{p+1}^h \end{matrix} = (\sigma) \times \begin{matrix} a_p - h & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_{p+1} \\ \beta_{p+1} \end{matrix}.$$

On aurait encore une relation analogue entre un quotient intermédiaire et un quotient intermédiaire successif du même intervalle. On passe donc des termes d'un quotient intermédiaire (ou d'un nombre inférieur à 1) aux termes d'un quotient successif (intermédiaire ou non) par une substitution de la forme (σ) ou $(\sigma) \times (A)$.

5. Les quotients intermédiaires ainsi définis sont inférieurs à 1. On peut avoir aussi à considérer leurs inverses (supérieurs à 1), que j'appellerai *quotients à droite*. Ils vérifient les égalités

$$\begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \beta_{p+1}^h \\ \alpha_{p+1}^h \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{matrix} = \begin{matrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times (\sigma) \begin{matrix} \beta_{p+1}^h \\ \alpha_{p+1}^h \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} \beta_{p+1}^h \\ \alpha_{p+1}^h \end{matrix} = \begin{matrix} a_p - h & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_{p+1} \\ \beta_{p+1} \end{matrix}.$$

En rapprochant ces résultats des précédents, on peut obtenir la relation générale entre deux quotients complets successifs (non nécessairement consécutifs) d'un même nombre. Je distinguerai les quotients complets *principaux* (non intermédiaires), *intermédiaires à gauche* (plus petits que 1) et *intermédiaires à droite* (inverses des précédents); pour simplifier je considérerai le nombre lui-même comme un quotient complet : principal s'il est supérieur à 1, intermédiaire à gauche dans le cas contraire. Dans ces conditions on passe d'un quotient à un quotient successif ;

1° *Par une substitution* (A) *si le premier quotient est principal ou intermédiaire à droite, le deuxième étant principal ou intermédiaire à gauche.*

2° *Par* $(\sigma)\times(A)$ *si le premier est intermédiaire à gauche, le deuxième étant principal ou intermédiaire à gauche.*

3° *Par* $(A)\times(\sigma)$ *si le premier est principal ou intermédiaire à droite, le deuxième étant intermédiaire à droite.*

4° *Par* $(\sigma)\times(A)\times(\sigma)$ *si le premier est intermédiaire à gauche, le deuxième étant intermédiaire à droite.*

6. Le développement d'une irrationnelle en fraction continue engendre donc un ensemble de substitutions modulaires à termes positifs. Réciproquement on peut chercher si une substitution modulaire à termes positifs provient d'un développement en fraction continue. On peut d'abord démontrer la proposition suivante :

Une substitution modulaire à termes entiers tous positifs ou nuls [exception faite de la substitution unité et de (σ)]

$$\Sigma = \begin{matrix} P & P' \\ Q & Q' \end{matrix}, \qquad \begin{vmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

est de l'une des quatre formes

$$(A), \quad (\sigma)\times(A), \quad (A)\times(\sigma), \quad (\sigma)\times(A)\times(\sigma)$$

et vérifie, suivant les cas, les systèmes d'inégalités

$$(4) \qquad \begin{cases} P \geqq P' \\ Q \geqq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \geqq Q, \\ P' \geqq Q', \end{cases}$$

$$(4\ bis) \qquad \begin{cases} P \geqq P' \\ Q \geqq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \leqq Q, \\ P' \leqq Q', \end{cases}$$

$$(4\ ter) \qquad \begin{cases} P \leqq P' \\ Q \leqq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \geqq Q, \\ P' \geqq Q', \end{cases}$$

$$(4\ quater) \qquad \begin{cases} P \leqq P' \\ Q \leqq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \leqq Q, \\ P' \leqq Q'; \end{cases}$$

les égalités n'ayant pas lieu simultanément.

On peut démontrer par récurrence que toute substitution (A) vérifie les inégalités (4), en montrant que ces inégalités étant supposées vraies pour une substitution Σ, sont vraies à fortiori pour le produit de Σ par une substitution (a). Le produit à droite ou à gauche par (σ), ayant pour seul effet une permutation des colonnes entre elles ou de lignes entre elles, on déduit du résultat précédent que les substitutions $(\sigma)\times(A)$, $(A)\times(\sigma)$, $(\sigma)\times(A)\times(\sigma)$, vérifient respectivement les inégalités (4 *bis*), (4 *ter*), (4 *quater*), ce qui démontre la deuxième partie de la propriété.

7. La première partie est évidente si l'un des termes de Σ est nul, (A) se réduit alors à un seul facteur (a).

Supposons maintenant que l'un des termes soit égal à 1; en multipliant s'il y a lieu Σ par (σ) *à droite ou à gauche*, ou *des deux côtés*, on peut amener ce terme 1 à être le dernier de la diagonale principale. De sorte que l'une des substitutions

$$\Sigma, \quad (\sigma)\times\Sigma, \qquad \Sigma\times(\sigma), \qquad (\sigma)\times(\Sigma)\times(\sigma)$$

est de la forme

$$S = \begin{matrix} P & P' \\ Q & 1 \end{matrix}$$

Si deux des termes étaient égaux à 1, on ramènerait encore à la même forme, mais avec la condition supplémentaire que le déterminant soit égal à $+1$.

Quoi qu'il en soit, on peut décomposer S d'après l'une des deux formules, suivant que le déterminant est $+1$ ou -1

$$\begin{matrix} P & P' \\ Q & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} P' & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} Q & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} P & P' \\ Q & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} P'-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} Q-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

Par suite S est d'une forme (A) et Σ est de l'une des quatre formes indiquées.

Supposons enfin qu'aucun des termes ne soit égal à 1; en multipliant s'il y a lieu Σ *à droite* par (σ), on peut rendre P supérieur à P'. Mais alors les fractions $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, ont même partie entière; en effet en appelant q la partie entière de $\frac{P}{P'}$, on a, en tenant compte de ce que la substitution est modulaire,

$$\frac{P}{P'} = q + \frac{\lambda}{P'},$$
$$\frac{Q}{Q'} = q + \frac{\lambda}{P'} \pm \frac{1}{P'Q'}.$$

λ est un entier positif non nul, sinon le déterminant de la substitution serait divisible par P', ce qui est absurde. D'autre part λ est inférieur à P' et comme par hypothèse $Q' > 1$, on a manifestement

$$0 < \frac{\lambda}{P'} \pm \frac{1}{P'Q'} < 1,$$

ce qui montre que q est la partie entière de $\frac{Q}{Q'}$. On peut alors poser

$$\begin{matrix} P & P' \\ Q & Q' \end{matrix} = \begin{matrix} P' & P'' \\ Q' & Q'' \end{matrix} \times \begin{matrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix},$$

et, comme q est la partie entière commune à $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, les termes de la nouvelle substitution sont positifs et vérifient les inégalités

$$P'' < P', \qquad Q'' < Q'.$$

Si P'' et Q'' sont différents de 1, on peut décomposer à nouveau cette substitution en un produit d'une substitution analogue par un facteur (a). Et ainsi de suite jusqu'à obtenir une substitution dont l'un des termes de la deuxième colonne soit 1; en multipliant au besoin *à gauche* par (σ) on obtiendra une substitution de la forme S et par suite de la forme (A). En tenant compte de la première opération qu'on a peut-être dû faire subir à Σ, on a bien démontré que Σ est de l'une des quatre formes indiquées.

La démonstration montre en outre que la décomposition de Σ n'est possible que d'une seule manière. L'algorithme indiqué pour cette décomposition est identique, sauf les dernières opérations, à la recherche du p. g. c. d. pour les nombres P et P' ou Q et Q'.

8. Supposons maintenant qu'une substitution Σ (modulaire, à termes positifs) transforme les nombres α, β en α', β' :

$$(5) \qquad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} = \Sigma \times \begin{matrix} \alpha' \\ \beta' \end{matrix},$$

α, β, α', β' étant positifs et les rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ irrationnels, on peut affirmer que *ces rapports sont des quotients complets* (principaux ou intermédiaires) *successifs d'un même nombre*, ou encore que $\frac{\alpha'}{\beta'}$ *est un quotient complet de* $\frac{\alpha}{\beta}$. Les cas qui peuvent alors se présenter ont été indiqués au n° 5 dont la propriété précédente constitue une réciproque.

Soit par exemple le cas où Σ est d'une forme (A).

$$\Sigma = (a_0) \times (a_1) \times \ldots \times (a_n), \qquad (a_p) = \begin{matrix} a_p & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

Considérons les systèmes de nombres α_p, β_p définis par

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = (a_n) \times \frac{\alpha'}{\beta'}, \qquad \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = (a_{n-1}) \times \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = (a_1) \times \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Les rapports $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ sont manifestement supérieurs à 1 et l'on a, d'autre part, comme conséquence de (5),

$$\frac{\alpha}{\beta} = (a_0) \times \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

Il en résulte que $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ est le premier quotient complet (principal) de $\frac{\alpha}{\beta}$ (également supérieur à 1), $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ est de même le premier quotient de $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ et par suite le deuxième de $\frac{\alpha}{\beta}$ et ainsi de suite, $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ est le $n^{\text{ième}}$. Donc $\frac{\alpha'}{\beta'}$ sera le $n+1^{\text{ième}}$ s'il est supérieur à 1, ou sera un quotient intermédiaire (à gauche) entre le $n^{\text{ième}}$ et le $n+1^{\text{ième}}$ quotients principaux s'il est inférieur à 1. On étudierait de même les autres cas.

II. — Transformation d'une fraction continue.

9. Soient deux irrationnelles positives, mises sous forme de quotients : $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ liées par une *relation homographique à coefficients entiers :*

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{A\alpha + A'\beta}{B\alpha + B'\beta}, \qquad K = AB' - BA' \neq 0,$$

qu'on peut écrire, d'après les notations déjà employées,

$$\frac{\gamma}{\delta} = \mathrm{T} \times \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \mathrm{T} = \begin{matrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}' \\ \mathrm{B} & \mathrm{B}' \end{matrix}.$$

Je me propose de montrer comment, dans des cas assez étendus, on peut déduire le développement en fraction continue de $\frac{\gamma}{\delta}$ de celui de $\frac{\alpha}{\beta}$.

Lorsque la substitution T est modulaire ($\mathrm{K} = \pm 1$), on sait que les suites des quotients incomplets des deux nombres ne diffèrent que par les premiers termes.

On peut énoncer cette propriété en disant qu'à partir d'un certain rang p les quotients complets $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ de $\frac{\alpha}{\beta}$ le sont aussi pour $\frac{\gamma}{\delta}$. Ou encore, en posant

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Sigma_n \times \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

les substitutions modulaires $\mathrm{T} \times \Sigma_n$, à partir de $n \geqq p$ ont leurs termes positifs et vérifient même les inégalités (4) ou (4 *bis*) suivant que $\frac{\gamma}{\delta}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Ce dernier énoncé conduit à une *méthode pratique* pour déterminer le rang p et les premiers quotients incomplets de $\frac{\gamma}{\delta}$ (ceux de $\frac{\alpha}{\beta}$ étant supposés connus). Il suffit de chercher la première substitution $\mathrm{T} \times \Sigma_i$ $[i = (0, 1, 2, \ldots)]$ qui vérifie les inégalités (4) ou (4 *bis*) et de la décomposer en un produit suivant le procédé indiqué au n° 7.

10. Si T n'est pas modulaire, on peut toujours, d'après une propriété bien connue [1] la décomposer en un produit d'une substitution modulaire par une autre à termes entiers de la forme

$$\begin{matrix} a & -x \\ 0 & b \end{matrix} \qquad \begin{cases} ab = \mathrm{K}, \\ 0 \leqq x < b, \end{cases}$$

[1] Hermite a énoncé cette propriété pour une substitution linéaire d'ordre quelconque, *Journal de Crelle*, t. 41, page 192.

Ceci posé, je ne traiterai le problème *que si* $\frac{\alpha}{\beta}$ *a une infinité de quotients complets supérieurs à* K.

En désignant par $\frac{\alpha'}{\beta'}$ le premier d'entre eux (qui peut d'ailleurs être $\frac{\alpha}{\beta}$ lui-même), d'après la propriété précédente, on peut écrire la relation entre γ, δ et α', β' sous la forme

$$\begin{matrix}\gamma\\ \delta\end{matrix} = \mathrm{U} \times \begin{matrix} a & -x \\ 0 & b\end{matrix} \times \begin{matrix}\alpha' \\ \beta'\end{matrix} \qquad \left\{\begin{array}{l} ab = \mathrm{K}, \\ 0 \leqq x < b, \end{array}\right.$$

U étant modulaire. Alors en posant

$$\begin{matrix}\gamma\\ \delta\end{matrix} = \mathrm{U} \times \begin{matrix}\gamma' \\ \delta'\end{matrix},$$

on aura

$$(6) \qquad \begin{matrix}\gamma'\\ \delta'\end{matrix} = \begin{matrix} a & -x \\ 0 & b\end{matrix} \times \begin{matrix}\alpha \\ \beta'\end{matrix}.$$

Le quotient $\frac{\alpha'}{\beta'}$ étant supérieur à K et *à fortiori* à $\frac{x}{a}$, et ses termes α', β', étant positifs, les nombres

$$\gamma' = a\alpha' - x\beta', \qquad \delta' = b\beta'$$

sont aussi positifs. Je vais chercher le développement de $\frac{\gamma'}{\delta'}$, celui de $\frac{\gamma}{\delta}$ s'en déduira d'après la méthode du numéro précédent.

11. Soit $\frac{\alpha''}{\beta''}$ un quotient complet supérieur à K, successif de $\frac{\alpha'}{\beta'}$ (par exemple le deuxième quotient de $\frac{\alpha}{\beta}$ qui remplit cette condition). Il est lié à $\frac{\gamma'}{\delta'}$ par une relation de la forme

$$\begin{matrix}\gamma'\\ \delta'\end{matrix} = \begin{matrix} a & -x \\ 0 & b\end{matrix} \times \begin{matrix} \mathrm{P} & \mathrm{P}' \\ \mathrm{Q} & \mathrm{Q}'\end{matrix} \times \begin{matrix}\alpha'' \\ \beta''\end{matrix}.$$

L'artifice consiste alors à permuter, pour ainsi dire, le produit du deuxième membre, en cherchant une égalité de la forme

$$\begin{matrix} a & -x \\ 0 & b\end{matrix} \times \begin{matrix} \mathrm{P} & \mathrm{P}' \\ \mathrm{Q} & \mathrm{Q}'\end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{S} & \mathrm{S}' \\ \mathrm{T} & \mathrm{T}'\end{matrix} \times \begin{matrix} a_1 & -x_1 \\ 0 & b_1\end{matrix}.$$

Cette égalité donne pour S, S′, T, T′ les valeurs

$$S = \frac{1}{a_1}(aP - xQ), \qquad T = \frac{bQ}{a_1},$$
$$S' = \frac{1}{a_1 b_1}[(aP - xQ)x_1 + (aP' - xQ')a_1]; \qquad T' = \frac{b}{a_1 b_1}(Qx_1 + Q'a_1).$$

On déterminera a_1, b_1, x_1 par la condition que

$$\Sigma' = \begin{matrix} S & S' \\ T & T' \end{matrix}$$

soit modulaire à termes positifs. Cette condition conduit aux règles suivantes [1]

$$\begin{array}{llll} \delta & \text{p. g. c. d. de} & a & \text{et } Q, \\ a_1 & \text{p. g. c. d. de} & aP - xQ & \text{et } b\delta, \end{array}$$
$$a_1 b_1 = K,$$
$$(aP - xQ)x_1 + (aP' - xQ')a_1 \equiv 0 \pmod{K}, \tag{7}$$
$$Qx_1 + Q'a_1 \equiv 0 \pmod{a}, \tag{7 bis}$$
$$(0 \leqq x_1 < b_1).$$

12. Je me contenterai de montrer que ces règles conduisent à un seul système de valeurs pour a_1, b_1, x_1 et que ces valeurs vérifient la condition imposée. On vérifierait sans difficulté que c'est le seul système remplissant cette condition (il faudrait se servir du fait que Q et Q′ sont premiers entre eux); mais cette vérification n'est pas indispensable pour le but poursuivi.

Posons, δ ayant été déterminé comme il est dit,

$$a = \delta a', \qquad Q = \delta Q_1,$$
$$aP - xQ = \delta(a'P - xQ_1),$$

a_1 est donc divisible par δ et le quotient a'_1 est le p. g. c. d. de $a'P - xQ_1$ et de b. Posons

$$a'P - xQ_1 = a'_1 h, \qquad b = a'_1 b'.$$

Ceci posé, la congruence (7 *bis*) est équivalente à

$$Q_1 x_1 + Q' a'_1 \equiv 0 \pmod{a'},$$

(1) Dans la Note citée ces règles avaient été indiquées de façon incomplète, la deuxième congruence ayant été omise.

Comme Q_1 et a' sont premiers entre eux, cette congruence a une infinité de solutions données par la formule

$$x_1 = AQ'a'_1 + \lambda a',$$

λ étant un entier indéterminé et A une solution de la congruence

$$AQ_1 + 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a').$$

En écrivant que x_1 est solution de (7), on obtient la congruence en λ

$$\lambda a'(aP - xQ) + a'_1[a(AQ'P + P'\delta) - xQ'\delta(AQ_1 + 1)] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, k),$$

qui est équivalente (après division par $a \times a'_1$) à

$$\lambda h + (AQ'P + P'\delta) - xQ'\frac{AQ_1 + 1}{a'} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, b').$$

Dans cette nouvelle congruence $\dfrac{AQ_1 + 1}{a'}$ est un entier; comme h et b' sont premiers entre eux, elle a une infinité de solutions données par la formule

$$\lambda = \lambda_0 + \mu b'.$$

De sorte que, finalement, les congruences (7) et (7 *bis*) auront des solutions communes données par la formule

$$AQ'a'_1 + \lambda_0 a' + \mu a' b' = B + \mu b_1.$$

On peut disposer de l'indéterminée μ et, ceci, d'une seule façon pour que cette solution soit comprise entre o inclus et b_1 exclu [1].

D'après le choix de a_1, S est un entier (égal à h), il en est de même de

$$T = \frac{bQ}{a'_1\delta} = b'Q_1.$$

Les congruences (7) et (7 *bis*) montrent que S' et T' sont aussi entiers. D'autre part, d'après le choix de b_1, le déterminant de Σ' est égal à $+1$.

Enfin les termes de Σ' sont positifs : c'est évident pour T et T'.

---

[1] Cette démonstration de l'existence de x_1 est aussi une méthode de calcul.

Pour S et S', ce fait résulte de ce que $\frac{\alpha'}{\beta'}$ est supérieur à K. En reprenant le raisonnement du n° 7, on peut démontrer que $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ sont alors supérieurs ou égaux à $K - 1$ (c'est aussi ce qui résulterait des propriétés d'approximation des réduites) et *a fortiori* à $\frac{x}{a}$. Donc $aP - xQ$ et $aP' - xQ'$ sont positifs ou nuls et il en est de même de S et S'.

13. La substitution Σ' et les nombres a_1, b_1, x_1 étant ainsi choisis, déterminons γ'', δ'' par l'égalité

$$\frac{\gamma''}{\delta''} = \begin{matrix} a_1 & -x_1 \\ 0 & b_1 \end{matrix} \times \frac{\alpha''}{\beta''}, \tag{6 bis}$$

On en déduit la relation entre γ', δ' et γ'', δ'' :

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \Sigma' \times \frac{\gamma''}{\delta''}.$$

Mais d'après l'hypothèse faite, $\frac{\alpha''}{\beta''}$ étant supérieur à K et *a fortiori* à $\frac{x_1}{a_1}$ les nombres

$$\gamma'' = a_1\alpha'' - x_1\beta'', \qquad \delta'' = b_1\beta''$$

sont positifs. Donc, d'après la propriété du n° 8, $\frac{\gamma''}{\delta''}$ est un quotient complet principal ou intermédiaire, à droite ou à gauche, et l'on aura les premiers quotients incomplets de $\frac{\gamma'}{\delta'}$ en décomposant Σ' en un produit d'après la méthode du n° 7.

L'égalité (6 *bis*) est de la même forme que (6); en appelant $\frac{\alpha'''}{\beta'''}$ un quotient de $\frac{\alpha''}{\beta''}$ supérieur à K, on peut recommencer le même calcul et déterminer des nombres a_2, b_2, x_2, une substitution Σ'' et un quotient complet $\frac{\gamma'''}{\delta'''}$ de $\frac{\gamma''}{\delta''}$ et par suite de $\frac{\gamma'}{\delta'}$. Et ainsi de suite, la méthode est indéfiniment applicable, d'après l'hypothèse faite sur les quotients de $\frac{\alpha}{\beta}$. En réunissant les suites partielles de quotients incomplets on obtiendra la suite des quotients incomplets de $\frac{\gamma'}{\delta'}$. Dans le cas où $\frac{\gamma^{(p)}}{\delta^{(p)}}$ serait intermédiaire, il y aurait lieu d'ajouter le dernier quotient incomplet obtenu pour $\frac{\gamma^{(p-1)}}{\delta^{(p-1)}}$ et le premier obtenu pour $\frac{\gamma^{(p)}}{\delta^{(p)}}$. Ceci, comme conséquence de l'égalité

$$\begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} a+b & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

14. *Exemple.* — Soit, par exemple, un nombre $u = \frac{\alpha}{\beta}$ ayant pour premiers quotients incomplets

$$15,\quad 2,\quad 1,\quad 13,\quad 17,\quad 8,\quad 6,\quad 20,\quad 2,\quad 2,\quad 21,$$

et proposons-nous de former le développement de

$$v = 3u - \frac{1}{2} = \frac{6\alpha - \beta}{2\beta}.$$

Le déterminant de la substitution est 12. Séparons les quotients incomplets proposés en groupes commençant par un nombre supérieur à 12. On obtient les substitutions modulaires

$$(15) \times (2) \times (1) = \begin{matrix} 46 & 31 \\ 3 & 2 \end{matrix}, \qquad (13) = \begin{matrix} 13 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix},$$

$$(17) \times (8) \times (6) = \begin{matrix} 839 & 137 \\ 49 & 8 \end{matrix}, \qquad (20) \times (2) \times (2) = \begin{matrix} 102 & 41 \\ 5 & 2 \end{matrix}.$$

En appliquant la méthode indiquée on trouve successivement les résultats

$$\begin{matrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 46 & 31 \\ 3 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 91 & 46 \\ 2 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{matrix} \times \begin{matrix} 13 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 39 & 10 \\ 4 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 12 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 12 \end{matrix} \times \begin{matrix} 839 & 137 \\ 49 & 8 \end{matrix} = \begin{matrix} 173 & 153 \\ 147 & 130 \end{matrix} \times \begin{matrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 102 & 41 \\ 5 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 398 & 345 \\ 15 & 13 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & -10 \\ 0 & 12 \end{matrix}.$$

En décomposant en produit chacune des substitutions modulaires trouvées, on obtient :

$$\begin{matrix} 91 & 46 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (45)\times(1)\times(1),$$

$$\begin{matrix} 39 & 10 \\ 4 & 1 \end{matrix} = (9)\times(1)\times(3),$$

$$\begin{matrix} 173 & 153 \\ 147 & 130 \end{matrix} = (1)\times(5)\times(1)\times(1)\times(1)\times(7)\times(1),$$

$$\begin{matrix} 398 & 345 \\ 15 & 13 \end{matrix} = (26)\times(1)\times(1)\times(6)\times(1).$$

Les premiers quotients incomplets de v sont donc

45, 1, 1, 9, 1, 3, 1, 5, 1, 1, 1, 7, 1, 26, 1, 1, 6, 1,

et le quotient complet (principal) suivant est :

$$\frac{\alpha' - 10\beta'}{12\beta'} = \frac{u'}{12} - \frac{10}{12},$$

en désignant par $u' = \frac{\alpha'}{\beta'}$ le quotient complet de u qui précède le quotient incomplet 21 (le dernier indiqué).

III. — Applications.

15. La méthode indiquée permet, théoriquement au moins, de trouver le développement de $\frac{\gamma}{\delta}$, connaissant celui de $\frac{\alpha}{\beta}$. Dans la pratique on n'obtient que les premiers quotients du développement, puisqu'on ne peut faire qu'un nombre *fini* d'opérations. Toutefois on pourrait se proposer, connaissant une loi de succession des quotients incomplets de $\frac{\alpha}{\beta}$, d'en déduire une loi de succession des quotients de $\frac{\gamma}{\delta}$. Ce problème peut encore être considéré comme théoriquement résolu : puisqu'on peut calculer un nombre indéfini de quotients de $\frac{\gamma}{\delta}$, on peut dire que leur calcul, constitué par des opérations bien définies, est une loi de succession. Mais, ainsi que dit M. Poincaré (¹), en général un problème n'est pas ou résolu

(¹) L'Avenir des Mathématiques (Congrès de Rome ou *Science et Méthode* Flammarion, éd., 1908).

ou non résolu, il est *plus ou moins résolu*. Si la loi de succession pour $\frac{\alpha}{\beta}$ est *simple* [1], la réponse précédente semblera évidemment une solution insuffisante et trop compliquée, il est naturel de chercher une loi *simple* pour $\frac{\gamma}{\delta}$. C'est ce que je vais essayer de faire pour quelques cas, d'ailleurs assez restreints.

On pourrait d'abord vérifier sans difficultés que, si le développement de $\frac{\alpha}{\beta}$ est périodique, il en est de même de celui de $\frac{\gamma}{\delta}$. Mais ce n'est pas là un résultat bien remarquable, puisqu'il peut se ramener à ce fait qu'après une transformation homographique (à coefficients entiers), un nombre algébrique du deuxième degré est encore algébrique du deuxième degré.

16. Soit un nombre u, *a priori* quelconque, et une transformation de déterminant K.

Séparons la suite des quotients incomplets de u en groupes commençant chacun par un nombre supérieur à K, et faisons les produits des substitutions (a) correspondantes.

Soit

$$\Sigma = \begin{matrix} P & P' \\ Q & Q' \end{matrix}$$

l'un de ces produits. Je supposerai connue la loi de succession des substitutions Σ.

Dans la recherche de chaque groupe de quotients incomplets du transformé v de u, on peut, en somme, distinguer deux opérations : 1° la recherche de la substitution (voir n° 11).

$$\theta_1 = \begin{matrix} a_1 & -x_1 \\ 0 & b_1 \end{matrix};$$

2° la recherche de la substitution modulaire, produit de substitutions (a) de v

$$\Sigma' = \begin{matrix} S & S' \\ T & T' \end{matrix}.$$

La détermination de θ_1 ne dépend que des restes, module K, de

---

[1] Il est difficile de préciser ce mot, en particulier dans le cas présent où il s'agit d'une loi de succession de *nombres entiers*.

P, P′, Q, Q′; je désignerai par π, π', ρ, ρ' ces restes supposés compris entre o inclus et K exclu. Pour trouver une loi simple pour le développement de v, il y aura donc intérêt à connaître une loi simple de succession des substitutions

$$R = \begin{matrix} \pi & \pi' \\ \rho & \rho' \end{matrix}.$$

17. Supposons, ce qui semble la loi la plus simple, que la suite des R soit périodique. On peut encore énoncer ce fait en disant que la suite des Σ se reproduit périodiquement, à des multiples près de K, pour les valeurs des coefficients.

Alors *la suite des* θ *est périodique;* ceci résulte de ce que, pour une valeur de K, les substitutions θ différentes sont en *nombre fini* N, leurs termes vérifiant les inégalités

$$o < a \leqq K, \qquad o < b \leqq K, \qquad o \leqq x < b \leqq K.$$

Soit en effet

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_h; \qquad R_1, \quad \ldots, \quad R_h; \qquad R_1, \quad \ldots; \qquad \ldots$$

la suite (¹) des R, h étant la période, et soit

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_h, \quad \theta_{h+1}; \qquad \ldots$$

la suite des θ, θ_0 étant la substitution initiale donnée et θ_1, θ_2, …, θ_h, … celles qui ont été déterminées par la méthode du n° **11** appliquée successivement à

$$\theta_0 \times R_1, \quad \theta_1 \times R_2, \quad \theta_2 \times R_3, \quad \ldots, \quad \theta_{h-1} \times R_h; \qquad \ldots.$$

Or parmi les $N + 1$ nombres θ

$$\theta_0, \quad \theta_h, \quad \theta_{2h}, \quad \ldots, \quad \theta_{Nh},$$

il y en a nécessairement deux identiques

$$\theta_{\alpha h} = \theta_{(\alpha+n)h}.$$

Pour déterminer le suivant de $\theta_{(\alpha+n)h}$ il faudra appliquer la

(¹) J'ai supposé la suite périodique simple, ce qu'on peut toujours supposer en remplaçant, s'il y a lieu, u par un de ses quotients complets.

méthode à

$$\theta_{(\alpha+n)h} \times R_1 = \theta_{\alpha h} \times R_1,$$

On trouvera donc une substitution identique à $\theta_{\alpha h+1}$ et ainsi de suite. Les deux suites combinées des θ et des R seront donc périodiques et de période nh, les premiers termes de la période étant

$$\theta_{\alpha h}, \quad R_1.$$

18. Passons maintenant à la recherche de Σ', en supposant toujours la suite des R périodique. Une substitution Σ peut s'écrire

$$\begin{matrix} \pi + pK & \pi' + p'K \\ \rho + qK & \rho' + q'K \end{matrix},$$

et supposons connu $\theta_i\,(a, b, x)$ précédant et $\theta_{i+1}\,(a', b', x')$ suivant Σ. On déterminera Σ' par l'égalité

$$\theta_i \times \Sigma = \Sigma' \times \theta_{i+1},$$

Ce qui donne pour les termes de Σ' les expressions

$$\begin{aligned} S &= \sigma + b'(ap - xq), \\ S' &= \sigma' + (ap - xq)x' + (ap' - xq')a'; \\ T &= \tau + bb'q, \\ T' &= \tau' + b\,(qx' + q'a'); \end{aligned}$$

σ, σ' τ, τ' ne dépendent que des termes de R et par suite seront les mêmes pour deux substitutions Σ d'indices β, $\beta + nh$ ($\beta > \alpha h$). Sans autre hypothèse que la précédente, on ne peut affirmer *a priori* que les Σ' se reproduiront aussi à des multiples de K près pour leurs coefficients. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les restes, module K de p, p', q, q' soient aussi périodiques, ce qui revient à supposer que les restes, module K^2, des termes des Σ, se reproduisent périodiquement. C'est ce qu'on vérifie aisément par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent; si m est la période des p, p', q, q', la période des Σ' sera mnh ou un de ses diviseurs.

En résumé *si les termes des Σ sont tels que leurs restes relativement au module K^2 se reproduisent périodiquement, on peut grouper les quotients incomplets de v de façon que les* *termes des substitutions* Σ' *aient des restes, module* K, *qui se reproduisent périodiquement.*

19. Dans ce qui précède, je ne me suis occupé que de la périodicité des termes de Σ, sans rechercher comment elle était produite par les quotients incomplets. Ces considérations devraient être précisées, dans les différents cas possibles. Je vais les appliquer maintenant à une loi déterminée pour la suite des quotients incomplets de u. Je supposerai que *les termes de cette suite se partagent en groupes de* N *termes, les nombres correspondant de chaque groupe étant, ou égaux, ou congrus, module* K^2.

Séparons les nombres de chaque groupe en ensembles partiels tels que les termes de chaque ensemble, à l'exception du premier, soient égaux à leurs correspondants; un ensemble pouvant ne renfermer qu'un seul terme. En représentant les termes d'un ensemble par une même lettre, et en supposant, pour fixer les idées, trois ensembles dans chaque groupe, la suite des quotients incomplets sera par exemple (en remplaçant u, s'il y a lieu, par un quotient complet)

$$\begin{array}{llllllllll}
l, & l_1, & l_2, & \ldots; & m, & m_1, & \ldots; & n, & n_1, & \ldots;\\
l+\alpha_1 K^2, & l_1, & l_2, & \ldots; & m+\beta_1 K^2, & m_1, & \ldots; & n+\gamma_1 K^2, & n_1, & \ldots;\\
l+\alpha_2 K^2, & l_1, & l_2, & \ldots; & m+\beta_2 K^2, & m_1, & \ldots; & n+\gamma_2 K^2, & n_1, & \ldots;\\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots; & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots;
\end{array}$$

Faisons les produits des substitutions correspondant aux termes de chaque ensemble partiel :

$$\Sigma_1 = (l)\times(l_1)\times(l_2)\times\ldots,\qquad \Sigma_2=(m)\times(m_1)\times\ldots,\qquad \ldots.$$

Soit à faire sur u une transformation θ, nous appliquerons la méthode à ces substitutions Σ, les nombres $l+\alpha_i K^2$, $m+\beta_i K^2$, $n+\gamma_i K^2$ étant supposés supérieurs à K. Les considérations des numéros précédents sont applicables; les Σ ayant, de 3 en 3, leurs termes congrus, module K^2. Donc la suite des θ sera périodique, de période $3h$; supposons par exemple que la période commence au premier terme et cherchons la relation entre Σ'_1 et Σ'_{3h+1} correspondant à Σ_1 et Σ_{3h+1}.

En posant

$$\Sigma_1 = \begin{matrix} P & P' \\ Q & Q' \end{matrix},$$

on aura

$$\Sigma_{3h+1} = \begin{matrix} 1 & \alpha_h K^2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \times \Sigma_1 = \begin{matrix} P + \alpha_h K^2 Q & P' + \alpha_h K^2 Q \\ Q & Q' \end{matrix},$$

et l'on calculera Σ'_1 et Σ'_{3h+1} par les égalités

$$\theta \times \Sigma_1 = \Sigma'_1 \times \theta_1, \qquad \theta \times \Sigma_{3h+1} = \Sigma'_{3h+1} \times \theta_1,$$

de sorte que si les termes de Σ'_1 sont S, S', T, T' et ceux de θ et θ_1 respectivement a, b, x; a_1, b_1, x_1, on aura

$$\Sigma'_{3h+1} = \begin{matrix} S + ab_1 K \alpha_h Q & S' + a\alpha_h K(Qx_1 + Q'a_1) \\ T & T' \end{matrix}$$

ou

$$\Sigma'_{3h+1} = \begin{matrix} S + \alpha_h a^2 KT & S' + \alpha_h a^2 KT' \\ T & T' \end{matrix}.$$

Il en résulte que, si la décomposition de Σ'_1 en un produit de substitutions (a) est [1]

$$\Sigma'_1 = (l') \times (l'_1) \times (l'_2) \times \ldots,$$

celle de Σ'_{3h+1} n'en diffère que par le premier terme

$$\Sigma'_{3h+1} = (l' + \alpha_h a^2 K) \times (l'_1) \times (l'_2) \times \ldots.$$

On ferait la même démonstration pour Σ'_2 et Σ'_{3h+2}, etc. Donc, en tenant compte, s'il y a lieu, des réductions possibles entre les différents groupes de quotients incomplets ainsi obtenus pour v, on en conclut que la suite des quotients incomplets de v, vérifie la même loi que la suite de u.

20. C'est en somme cette propriété que j'ai énoncée dans la note déjà citée. Je supposais toutefois que les premiers termes de chaque ensemble partiel se reproduisaient périodiquement *relativement à tout module entier*.

Il en est alors de même de la suite des $\alpha_{\lambda h}$ et par conséquent

---

(1) l' peut être nul.

aussi des premiers termes des ensembles partiels de v. On obtient ainsi la propriété suivante :

Si, à partir d'un certain rang, certains quotients incomplets d'un nombre u se reproduisent périodiquement, et si les autres, tout en augmentant indéfiniment ont, relativement à un module entier quelconque, des restes se reproduisant périodiquement, la même propriété est encore vraie pour tout transformé homographique de u, la transformation ayant des coefficients entiers et un déterminant K *différent de* o.

L'hypothèse que les quotients augmentent indéfiniment est nécessaire pour qu'on puisse toujours appliquer la méthode de transformation, le nombre K étant quelconque. Pour la même raison on n'a rien supposé sur les premiers quotients de u, ou de son transformé en affirmant seulement que la propriété est vraie *à partir d'un certain rang*. Je signale à nouveau, ici, que M. Hurwitz a été conduit par des procédés différents à un résultat analogue ([1]).

21. Un cas particulièrement intéressant est celui où les quotients incomplets de u se répartissent en *plusieurs progressions arithmétiques* dont certaines peuvent être de raison nulle. Le calcul précédent est applicable. On a alors :

$$\alpha_{\lambda h} = \lambda r,$$

et le premier quotient incomplet déduit de $\Sigma'_{3\lambda h+1}$ est

$$l' + \lambda r a^2 K.$$

Par conséquent, les quotients incomplets de v se répartissent encore en progressions arithmétiques de raisons en général différentes des précédentes.

Ce qui fait l'intérêt de ce cas, c'est que des irrationnelles connues, $e^{\frac{1}{n}}$, la dérivée logarithmique de la fonction de Bessel pour $x = 1, \ldots$, ont des développements de cette forme. Je renvoie pour ces résultats à une méthode de sommation des fractions continues

([1]) *Viertelj. Naturf. Ges.*, Zurich, 1896.

que j'ai exposée dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹). Je me contenterai de traiter ici un exemple déterminé.

La suite des quotients incomplets de

$$u = \coth\frac{1}{3} = \frac{e^{\frac{2}{3}}+1}{e^{\frac{2}{3}}-1}$$

est

$$3,\quad 9,\quad 15,\quad 21,\quad \ldots,\quad 3+6n,\quad \ldots.$$

On peut en déduire le développement de $v = e^{\frac{2}{3}}$ qui est lié à u par une relation homographique qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{array}{c} v \\ 1 \end{array} = \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \times \begin{array}{c} u \\ 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} v \\ 1 \end{array} = \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \times \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array} \times \begin{array}{c} u \\ 1 \end{array}.$$

Le déterminant de la substitution étant 2, on peut appliquer la méthode au nombre u lui-même, en groupant 1 par 1 ses quotients incomplets et en posant par conséquent

$$\Sigma_n = \begin{array}{cc} 3+6(n-1) & 1 \\ 1 & 0 \end{array}.$$

La substitution formée par les restes, module K, est la même, quel que soit n

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}.$$

En appliquant à cette substitution la méthode du n° **11** pour trouver la période des θ on trouve comme θ successifs

$$\theta_0 = \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array},\qquad \theta_1 = \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array},\qquad \theta_2 = \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array},$$

$$\theta_{3n+\alpha} = \theta_\alpha,\qquad 0 \leqq \alpha < 3.$$

Pour obtenir les Σ' il suffira donc de calculer Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 ou plutôt $\Sigma'_{3\lambda+1}$, $\Sigma'_{3\lambda+2}$, $\Sigma'_{3\lambda+3}$.

(¹) 2 mai 1910.

On obtient ainsi

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 3+\lambda 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1+\lambda 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \quad \Sigma'_{3\lambda+1} = \begin{matrix} 1+\lambda 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 9+\lambda 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 18+\lambda 36 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}, \quad \Sigma'_{3\lambda+2} = \begin{matrix} 18+\lambda 36 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 15+\lambda 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 15+\lambda 18 & 8+\lambda 9 \\ 2 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}, \quad \Sigma'_{3\lambda+3} = \begin{matrix} 15+\lambda 18 & 8+\lambda 9 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$\Sigma'_{3\lambda+1}$ et $\Sigma'_{3\lambda+2}$ se composent d'une seule substitution (a), $\Sigma'_{3\lambda+3}$ se décompose en un produit de trois

$$\begin{matrix} 15+\lambda 18 & 8+\lambda 9 \\ 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 7+\lambda 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

Les quotients incomplets de $\frac{u-1}{2}$ seront donc

$$1,\ 18,\ 7,\ 1,\ 1,\ 10,\ 54,\ 16,\ 1,\ 1,\ \ldots,$$
$$1+9\lambda,\ \ 18+36\lambda,\ \ 7+9\lambda,\ 1,\ 1,\ \ldots,$$

et ceux de $e^{\frac{2}{3}}$ seront les mêmes, mais précédés du nombre 1.

Les considérations des n^{os} **17** et **18** pourraient encore s'appliquer à d'autres cas, par exemple lorsque la substitution Σ_n est de la forme [1] $U \times S^n$, U et S étant d'une forme (A). Je crois inutile de m'étendre plus longuement sur ces cas qui ne comprennent pas de développements d'irrationnelles connues.

---

(1) Un exemple de ce cas serait donné par le nombre ayant pour suite de quotients incomplets: $2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \ldots$.