

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Des équations dominantes

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 250-256

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__250_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__250_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DES ÉQUATIONS DOMINANTES;

PAR M. A. PELLET.

1. Soit t une variable positive; a étant une fonction finie pour $t = 0$, nous appellerons, d'après une expression de M. Cotton ⁽¹⁾, *fonction dominante* de a , une fonction A positive non décroissante lorsque t augmente et toujours supérieure ou égale au module de a ; pour une fonction $\frac{a}{t^n}$, a étant finie pour $t = 0$

(¹) *Sur l'intégration approchée des équations différentielles* (Bulletin de la Société mathématique, 1908).

et $n > 0$, une fonction dominante sera $\frac{A}{t^{n_1}}$, A étant toujours une fonction positive non décroissante et l'inégalité

$$A \geq |\alpha| t^{n_1-n}$$

étant satisfaite pour toute valeur de t . Nous appellerons *équation dominante* de l'équation

$$x_i - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

où f est une fonction holomorphe des quantités x , les coefficients étant des fonctions de t , toute équation

$$X_i - F(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$

dans laquelle les coefficients de F sont des fonctions dominantes des coefficients correspondants de la fonction f .

Soient les n équations :

$$(1) \quad x_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

formons les n équations dominantes respectives

$$X_i - F(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Désignons par $\mathcal{F}(X)$ le résultat de la substitution de X à X_1, X_2, \dots, X_n dans $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$; et considérons l'équation

$$(2) \quad X - \mathcal{F}(X) = 0.$$

Posons

$$\mathcal{F}(X) = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_m X^m + \dots,$$

et supposons que t variant de t_0 à t_1 ($t_1 > t > t_0$), l'inégalité

$$2A_0 - \mathcal{F}(2A_0) \geq 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 2A_1 - 4A_2A_0 - \dots - 2^m A_m A_0^{m-1} - \dots \geq 0$$

soit satisfaite. Pour ces valeurs de t , les équations (1) admettront un système de solutions unique; les valeurs de x_i seront toutes dominées par X et $2A_0$ ($2A_0 > X > |x_i|$) et pourront être obtenues par la série de Newton. Pour les autres systèmes de solutions des équations (1), on aura

$$|x_i| > 2A_0.$$

Voir mon Mémoire sur les équations majorantes (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

2. Soit le système de n équations différentielles :

$$(3) \quad x'_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les fonctions inconnues x_1, \dots, x_n étant assujetties à s'annuler avec t ; f_i désigne une fonction holomorphe de x_1, x_2, \dots, x_n , les coefficients étant des fonctions de t continues ou de la forme $\frac{a}{t^e}$, a étant continue; x'_i dérivée de x_i . Formons comme tantôt les n équations dominantes respectives :

$$X'_i - F(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

puis l'équation

$$(4) \quad X' - \mathcal{F}(X) = 0,$$

en faisant

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = X.$$

Posons

$$\mathcal{F}(X) = A_0 + A_1 X + \dots + A_m X^m + \dots,$$

et supposons $A_0 = t^e B_0$, e étant supérieur à -1 , et B_0 finie pour $t = 0$; alors

$$\frac{A_0 t}{e + 1}$$

est une fonction dominante de toute intégrale $\int_0^t a dt$, où a est une fonction continue dominée par A_0 . Enfin considérons l'équation

$$(5) \quad Y' - \mathcal{F}\left(\frac{tY'}{e+1}\right) = 0;$$

et supposons que t variant de 0 à T , l'inégalité

$$2A_0 - \mathcal{F}\left(\frac{2tA_0}{e+1}\right) \geq 0,$$

ou

$$(6) \quad 1 \geq \frac{2A_1 t}{e+1} + \dots + 2^m \frac{A_m A_0^{m-1}}{(e+1)^m} t^m + \dots$$

soit satisfaite. Dans ces conditions, les équations (3) admettent

un système de solutions, s'annulant pour $t = 0$, et qu'on peut obtenir par la méthode des approximations successives.

En effet, l'équation (5) admet une racine γ' positive plus petite que $2A_0$; on en déduit une fonction γ s'annulant pour $t = 0$, plus petite que $\frac{2A_0 t}{e + 1}$.

L'équation (4) admet une solution X s'annulant avec t , qu'on peut obtenir par approximations successives, et l'on a $\gamma \geq X$. Les fonctions x_i données par approximations successives par les équations (4) admettent X pour fonction dominante.

3. De là il résulte que si dans f_i le coefficient de $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ est le rapport d'une fonction continue de t par une puissance de t , d'exposant inférieur à $m_1 + m_2 + \dots + m_n$, les équations (3) admettront un système de solutions s'annulant avec t , si par une substitution $x_i = v_i + y_i$, v_i étant une fonction continue de t s'annulant pour $t = 0$, on peut amener l'ordre infinitésimal de A_0 , e , par rapport à t , à être aussi grand que l'on veut.

Ainsi soient les $(n - 1)$ équations différentielles

$$(7) \quad \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

où tous les dénominateurs sont des fonctions holomorphes des variables x , s'annulant lorsque toutes ces variables s'annulent.

1° Si les termes du premier degré ne sont pas nuls dans toutes les fonctions f_i , égalons ces rapports à $\frac{dt}{t}$ et posons

$$f_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i,$$

$\varphi_i^{(1)}$ représentant l'ensemble des termes du premier degré de f_i ; φ_i ne contenant par suite que des termes du second degré au moins; puis $x_i = u_i + y_i$ et déterminons les n quantités u_i par les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$tu'_i = \varphi_i^{(1)}(u_1 \dots u_n),$$

et la condition de s'annuler avec t . Si $\Delta(\lambda)$ représente le déterminant des équations du premier degré homogènes

$$\lambda u_i = \varphi_i^{(1)}(u_1, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

φ le nombre des racines de l'équation de degré n

$$\Delta(\lambda) = 0$$

ayant leur partie réelle positive, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité, les quantités u_i contiennent φ constantes arbitraires et des termes contenant en facteur des puissances de Lt tout en tendant vers 0 avec t , s'il y a des racines multiples. Les équations en y_i seront de la forme

$$ty'_i = \varphi_i^{(1)}(y_1, y_2, \dots, y_n) + b_i^{(0)} + \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les coefficients de la fonction holomorphe ψ_i de y_1, \dots, y_n , qui s'annule avec ces variables, étant maintenant fonctions de t , ceux des termes du premier degré par rapport aux y s'annulant avec t , ainsi que $b_i^{(0)}$. Nous poserons

$$y_i = u_i^{(1)} + z_i,$$

les $u_i^{(1)}$ étant déterminées par les équations

$$tu_i^{(1)'} = \varphi_i^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) + b_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et la condition d'être infiniment petites avec t d'ordre le plus élevé possible; et opérerons sur les équations en z comme nous avons opéré sur les équations en y .

Nous obtenons ainsi pour les x_i des séries

$$x_i = u_i + u_i^{(1)} + \dots + u_i^{(K)} + \dots,$$

dans laquelle les termes sont infiniment petits avec t , l'ordre allant en augmentant avec l'indice K ; ces séries sont donc convergentes.

2° Si $p > 1$ est le degré des termes de moindre degré n'étant pas nuls dans toutes les fonctions f_i , égalons les rapports (7) à $\frac{dt}{t^p}$, et posons

$$f_i = \varphi_i^{(p)} + \varphi_i,$$

$\varphi_i^{(p)}$ représentant l'ensemble des termes homogènes de degré p dans f_i , φ_i ne contenant par suite que des termes de degré $p + 1$ au moins.

Puis posons

$$x_i = a_i t + y_i,$$

les n coefficients numériques a_i satisfaisant aux équations

$$a_i = \varphi_i^{(p)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

supposées compatibles. Les équations en y sont de la forme

$$t y'_i = \psi_i^{(1)}(y_1, y_2, \dots, y_n) + b_i^{(0)} + \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les fonctions $\psi_i^{(1)}$ étant homogènes, du premier degré, à coefficients constants; ψ_i une fonction holomorphe des quantités y , s'annulant avec toutes ces quantités; mais de plus les termes du premier degré en y s'annulent avec t ainsi que $b_i^{(0)}$, qui est un infiniment petit avec t d'ordre supérieur à 1; enfin le coefficient de $y_1^m y_2^m \dots y_n^m$ contient en dénominateur une puissance de t au plus égale à

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1.$$

Posons

$$y_i = u_i + z_i,$$

les fonctions u_i satisfaisant aux équations

$$t u'_i = \psi_i^{(1)}(u_1, u_2, \dots, u_n) + b_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et étant assujetties à être infiniment petites avec t d'un ordre supérieur à 1. Ainsi $\Delta(\lambda)$ étant le déterminant des équations du premier degré

$$\lambda u_i = \psi_i^{(1)}(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

ρ le nombre des racines de l'équation de degré n , $\Delta(\lambda) = 0$, dont la partie réelle est supérieure à 1, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité, les quantités u_i contiendront ρ constantes arbitraires et des termes contenant des puissances de Lt en facteur, tout en tendant vers 0, s'il y a des racines multiples.

On aura pour les z_i des équations de la même forme que les équations en y_i

$$t z'_i = \psi_i^{(1)}(z_1, z_2, \dots, z_n) + c_i^0 + \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Posons

$$z_i = w_i^{(1)} + w_i,$$

en déterminant $u_i^{(1)}$ par les équations linéaires

$$tu_i^{(1)} = \psi_i^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) + c_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et la condition d'être infiniment petites avec t , d'ordre le plus élevé possible; et opérons sur les équations en w_i comme nous avons opéré sur les équations en z_i . Nous obtenons ainsi pour les x_i des séries

$$x_i = a_i t + u_i + u_i^{(1)} + \dots + u_i^{(K)} + \dots,$$

où les termes $u_i^{(K)}$ infiniment petits avec t sont d'un ordre qui va en augmentant avec l'indice K ; ces séries sont donc convergentes.
