

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE SERVANT

**Surfaces isothermiques et surface de Bonnet qui se  
rattachent à la déformation des quadriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 39 (1911), p. 162-169

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1911\\_\\_39\\_\\_162\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__162_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SURFACES ISOTHERMIQUES ET SURFACES DE BONNET,  
QUI SE RATTACHENT A LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES;**

PAR M. MAURICE SERVANT.

Dans une série de Notes insérées aux *Comptes rendus* en 1899, M. Darboux a mis en évidence par une méthode géométrique une série de surfaces isothermiques qui se rattachent d'une façon étroite au problème de la déformation des quadriques. Dans cette Note, nous retrouverons ces mêmes surfaces par une méthode toute différente qui fournit également des surfaces d'Ossian Bonnet.

*Surfaces isothermiques.* — Considérons une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle; elle est définie intrinséquement par les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda du dv,$$

$$S dc dx = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2,$$

les équations de Gauss et Codazzi s'écrivent

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} D' = 0,$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} D' = 0,$$

$$DD'' - D'^2 = \lambda \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v}.$$

Posons

$$D = \Delta, \quad D'' = \Delta'', \quad D' = \lambda \Delta',$$

elles deviennent

$$\lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \quad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta''}{\partial u},$$

$$\frac{\Delta \Delta''}{\lambda^2} - \Delta'^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v};$$

on a, alors, simplement

$$\frac{1}{rr_1} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u \partial v}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = -2\Delta'$$

( $r$  et  $r_1$  désignant les rayons de courbure principaux).

Si la surface est isothermique, on voit de suite qu'on aura

$$\frac{\Delta}{\Delta''} = \frac{U(u)}{V(v)},$$

et, par conséquent, en choisissant convenablement les variables,

$$\Delta = \Delta''.$$

*Surfaces de Bonnet.* — Avec ce système particulier de coordonnées, on trouve de suite les propriétés caractéristiques des surfaces de Bonnet, qui admettent une déformation conservant les rayons de courbure principaux. En effet, soient  $S$  une telle surface et

$$ds^2 = 2\lambda du dv,$$

$$\Delta du^2 + 2\lambda \Delta' du dv + \Delta'' dv^2$$

les deux formes quadratiques qui la définisse intrinsèquement.

S'il existe une surface  $S_1$  applicable sur  $S$  avec conservation des rayons de courbure principaux, ses éléments seront évidemment de la forme

$$\Delta_1 = \Delta + U, \quad \Delta_1'' = \Delta'' + V, \quad \Delta_1' = \Delta',$$

et l'on devra avoir

$$\Delta_1 \Delta_1'' = \Delta \Delta'',$$

d'où

$$\frac{\Delta''}{V(v)} + \frac{\Delta}{U(u)} + 1 = 0.$$

Or, on peut toujours déterminer  $V$  et  $U$  de telle sorte qu'on ait

$$\Delta + \Delta'' = 2m;$$

on peut donc poser

$$\Delta = \delta + m, \quad \Delta' = \delta - m,$$

et les équations de Gauss s'écrivent

$$\lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \delta}{\partial v}, \quad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \delta}{\partial u}, \quad \frac{\delta^2 - m^2}{\lambda^2} - \Delta'^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u \partial v},$$

la surface  $S_1$  s'obtient en permutant  $\Delta$  et  $\Delta''$ .

*Déformation des quadriques.* — Pour résoudre le problème de la déformation, on peut, ainsi que l'a montré M. Darboux, chercher les lignes de la surface qui deviennent des asymptotiques de la surface déformée; nous les nommerons, avec M. Bianchi, les *asymptotiques virtuelles* de la surface.

M. Darboux a donné les équations des asymptotiques virtuelles pour une surface quelconque; dans le cas d'une quadrique, elles prennent une forme particulièrement simple. Si l'on suppose la surface rapportée à ses génératrices rectilignes, il vient

$$(A) \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial b}{\partial \beta} = \Omega,$$

$a$  et  $b$  étant les paramètres des génératrices rectilignes et  $\Omega$  étant une quantité qui dépend de la nature de la quadrique, mais qui rentre toujours dans la forme générale

$$\Omega = A a^2 b^2 + B a^2 + C b^2 + D a b + E.$$

Posons

$$(1) \quad \lambda \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial \beta}, \quad \lambda \frac{\partial a}{\partial \beta} = \frac{\partial b}{\partial \alpha},$$

il vient par un calcul facile

$$(B) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}.$$

Supposons que dans  $\Omega$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = C = 0,$$

il vient

$$(2) \quad \frac{b^2}{\lambda^2} - a^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha \partial \beta},$$

et l'on voit que les équations (1) et (2) sont précisément les équations de Gauss, relatives à une surface isothermique.

Par conséquent, si l'on peut mettre  $\Omega$  sous la forme

$$(C) \quad \Omega = \frac{1}{2} a^2 b^2 + D ab + E,$$

les formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda dx d\beta, \\ b(dx^2 + d\beta^2) + 2\lambda a dx d\beta$$

définiront intrinsèquement une surface isothermique.

Plus généralement, si l'on a

$$(D) \quad \Omega = -\frac{1}{2} a^2 b^2 + \frac{B^2}{2} a^2 + D ab + E,$$

il vient

$$(3) \quad \frac{b^2 - B^2}{\lambda^2} - a^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial \beta}.$$

Les formules (1) et (3) deviennent alors les équations de Gauss, relatives à une surface de Bonnet qui sera définie par les formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda dx d\beta, \\ (b + B) dx^2 + 2\lambda a dx d\beta + (b - B) d\beta^2 = 0.$$

On voit facilement comment on peut ramener  $\Omega$  aux formes (C) et (D). Considérons, en effet, les équations (A) et effectuons le changement de variables

$$a = \frac{ma_1 + n}{pa_1 + q}, \quad b = \frac{m_1 b_1 + n_1}{p_1 b_1 + q_1};$$

elles prendront la forme

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} \frac{\partial b_1}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial \beta} \frac{\partial b_1}{\partial \beta} \\ = A_1 a_1^2 b_1^2 + B_1 a_1^2 b_1 + C_1 a_1 b_1^2 + D_1 a_1^2 + E_1 b_1^2 + F_1 a_1 b_1 + \dots,$$

et les équations (1) deviennent

$$\lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial b_1}{\partial \beta}, \quad \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial \beta} = \frac{\partial b_1}{\partial x},$$

où l'on a

$$\lambda_1 = \lambda \frac{(p_1 b_1 + q_1)^2}{(p a_1 + q)^2} \frac{mq - np}{m_1 q_1 - n_1 p_1}.$$

Pour avoir des surfaces isothermiques, il faudra déterminer  $m, n, m_1, n_1$  par les conditions

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = 0.$$

Pour avoir des surfaces de Bonnet, on aura les conditions

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = C_1 = E_1 = 0.$$

Ces surfaces isothermiques et de Bonnet se présentent sous une forme élégante, si l'on fait intervenir les fonctions elliptiques.

Considérons une quadrique quelconque, son élément linéaire peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = \frac{H}{4} (u - v) \left[ \frac{du^2}{u^2 \Delta\left(\frac{1}{u}\right)} - \frac{dv^2}{v^2 \Delta\left(\frac{1}{v}\right)} \right],$$

où  $H$  désigne le hessien de la surface, et  $\Delta(S)$  le premier membre de l'équation en  $S$ . Posons

$$\alpha^3 \Delta\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (a - \alpha)(b - \alpha)(c - \alpha)$$

et

$$\rho^2 e_1 = \frac{a + b + c}{3} - a,$$

$$\rho^2 e_2 = \frac{a + b + c}{3} - b, \quad \rho^2 pu = \frac{a + b + c}{3} - \alpha,$$

$$\rho^2 e_3 = \frac{a + b + c}{3} - c, \quad \rho^2 p\omega = \frac{a + b + c}{3};$$

il vient

$$a - \alpha = \rho^2 (pu - e_1),$$

$$b - \alpha = \rho^2 (pu - e_2),$$

$$c - \alpha = \rho^2 (pu - e_3),$$

et l'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = k(pu - pv) [(pu - p\omega) du^2 - (pv - p\omega) dv^2].$$

La déformation de cette quadrique revient à l'habillage de la forme <sup>(1)</sup>

$$d\varphi^2 = - \left( \frac{1}{pu - pw} - \frac{1}{pv - pw} \right) (du^2 - dv^2);$$

si l'on pose

$$u = x + y,$$

$$v = x - y,$$

il vient facilement

$$d\varphi^2 = \frac{4[p(x+y) - p(x-y)]}{p(x+y)p(x-y) - pw[p(x+y) + p(x-y)] + p^2w} dx dy,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{-4p'(x)p'(y) dx dy}{\left\{ \begin{array}{l} \left( pxpy + \frac{1}{4}g^2 \right)^2 + g_3(px + py) \\ - pw \left[ 2 \left( pxpy - \frac{1}{4}g_2 \right) (px + py) - g_3 \right] + p^2w(px - py)^2 \end{array} \right\}},$$

ou en posant

$$px = a, \quad py = b,$$

$$\begin{aligned} d\varphi^2 &= \frac{4 da db}{\left( ab + \frac{1}{4}g_2 \right)^2 + g_3(a+b) - pw \left[ 2 \left( ab - \frac{1}{4}g_2 \right) (a+b) - g_3 \right] + p^2w(a-b)^2}, \\ &= \frac{2 da db}{\Omega} \end{aligned}$$

on a, alors,

$$-\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} = (b - pw)^2, \quad -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} = (a - pw)^2;$$

donc, si l'on pose

$$\lambda = \frac{\frac{\partial a}{\partial \beta}}{\frac{\partial b}{\partial \beta}}, \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial b}{\partial \beta} = \Omega,$$

il vient

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha} = \frac{(py - pw)^2}{\lambda^2} - (px - pw)^2,$$

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 1902.

et les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda \, d\alpha \, d\beta, \\ (p\gamma - p\omega)(dx^2 + d\beta^2) + 2\lambda(p\alpha - p\omega) \, d\alpha \, d\beta$$

définissent une surface isothermique.

Considérons la formule fondamentale

$$d\varphi^2 = - \left( \frac{1}{pu - p\omega} - \frac{1}{pv - p\omega} \right) (du^2 - dv^2)$$

et faisons le changement de variable

$$u = u_1 + \omega_1, \quad v = v_1 + \omega_1,$$

$\omega_1$  étant une demi-période ; il vient, par un calcul facile,

$$\frac{[p(\omega + \omega_1) - e_1]^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \left[ \frac{1}{pu - p(\omega + \omega)} - \frac{1}{pv_1 - p(\omega + \omega)} \right] (du_1^2 - dv_1^2),$$

si l'on pose

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(\omega + \omega_1) - e} = k^2,$$

$$\omega + \omega = \omega_1, \quad u_1 = x_1 + y_1, \quad v_1 = x_1 - y_1, \quad pu_1 = a_1, \quad py_1 = b_1.$$

On voit que  $\lambda_1$  étant défini par

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\partial a_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}},$$

on a

$$\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial^2 \log \lambda_1}{\partial \alpha \partial \beta} = k^2 \left( \frac{py_1 - p\omega_1}{p_1^2} \right)^2 - k^2 (px_1 - p\omega_1)^2,$$

et les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda_1 \, d\alpha \, d\beta, \\ k(py_1 - p\omega_1)(dx^2 + d\beta^2) + 2\lambda_1 k(px_1 - p\omega_1) \, d\alpha + d\beta$$

définissent une nouvelle surface isothermique. Remarquons que

$$x = x_1 + \omega,$$

$$y = y_1,$$

d'où

$$b_1 = b, \quad a = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{a_1 - e_1}, \\ \lambda = -\lambda \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(a_1 - e_1)^2} = -\frac{\lambda(a - e_1)^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}.$$



Si l'on procède de même avec les trois demi-périodes, on obtient ainsi quatre surfaces isothermiques ; en prenant les surfaces qui leur correspondent par la transformation de Bour et Christoffel, on obtiendra quatre autres surfaces (on peut aussi les obtenir en ajoutant les demi-périodes à  $\gamma$ ). Les huit surfaces ainsi obtenues sont les surfaces de M. Darboux.

---