BIOCHE

Sur les dégénérescences des surfaces desmiques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 215-216
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__215_0>

SUR LES DÉGÉNÉRESCENCES DES SURFACES DESMIQUES;

PAR M. CH. BIOCHE.

M. G. Humbert a déduit, par un calcul ingénieux, de la représentation des surfaces desmiques au moyen des fonctions elliptiques, une dégénérescence de ces surfaces ([1]). On peut obtenir directement cette dégénérescence, et d'autres encore, par un procédé direct et très élémentaire.

1. On sait ([2]) que deux tétraèdres homologiques de quatre façons différentes définissent un faisceau linéaire de surfaces du quatrième ordre (surfaces desmiques) comprenant le tétraèdre formé par les plans d'homologie. Si l'on prend ce dernier tétraèdre comme tétraèdre de référence, les autres tétraèdres peuvent se représenter par

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T = 0, \\ \alpha X + \beta Y - \gamma Z - \delta T = 0, \\ \alpha X - \beta Y - \gamma Z + \delta T = 0, \\ \alpha X - \beta Y + \gamma Z - \delta T = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \alpha X - \beta Y - \gamma Z - \delta T = 0, \\ \alpha X - \beta Y + \gamma Z + \delta T = 0, \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z - \delta T = 0, \\ \alpha X + \beta Y - \gamma Z + \delta T = 0. \end{cases}$$

Ces équations donnent immédiatement des propriétés fondamentales établies géométriquement par M. C. Stephanos ([3]).

Les tétraèdres (I) et (II) font partie du faisceau

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} &\alpha^4 X^4 + \beta^4 Y^4 + \gamma^4 Z^4 + \delta^4 T^4 \\ &\quad - 2\alpha^2\beta^2 X^2 Y^2 - 2\alpha^2\gamma^2 X^2 Z^2 - 2\alpha^2\delta^2 X^2 T^2 \\ &\quad - 2\beta^2\gamma^2 Y^2 Z^2 - 2\beta^2\delta^2 Y^2 T^2 - 2\gamma^2\delta^2 Z^2 T^2 + \lambda XYZT = 0. \end{aligned}$$

([1]) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1891, p. 396.

([2]) *Voir* ma Note *Sur les surfaces desmiques* (*Bull. Soc. math.*, t. XXXVII, 1909, p. 163).

([3]) *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. III, 1879, p. 434.

Le tétraèdre (I) correspond à $\lambda = 8\alpha\beta\gamma\delta$, le tétraèdre (II) correspond à $\lambda = -8\alpha\beta\gamma\delta$, et le tétraèdre des plans d'homologie à λ infini.

2. Si l'on fait tendre δ vers zéro, les tétraèdres (I) et (II) deviennent des systèmes de plans passant par le point

$$X = Y = Z = 0,$$

et ces systèmes se confondent. L'équation du faisceau devient

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &\alpha^4 X^4 + \beta^4 Y^4 + \gamma^4 Z^4 \\ &\quad - 2(\alpha^2\beta^2 X^2 Y^2 + \alpha^2\gamma^2 X^2 Z^2 + \beta^2\gamma^2 Y^2 Z^2) + \lambda XYZT = 0, \end{aligned}$$

et l'on retrouve la dégénérescence signalée par M. G. Humbert ([1]).

3. Si l'on fait tendre γ et δ vers zéro, les tétraèdres (I) et (II) deviennent des systèmes de deux couples de plans doubles passant par la droite $X = 0$, $Y = 0$, et le faisceau devient

$$\text{(C)} \qquad (\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2)^2 + \lambda XYZT = 0.$$

4. Si l'on fait tendre β, γ et δ vers zéro, les tétraèdres (I) et (II) se réduisent tous deux à

$$X^4 = 0$$

et le faisceau devient

$$\text{(D)} \qquad \alpha^4 X^4 + \lambda XYZT = 0.$$

Chaque surface de ce faisceau se décompose en un plan et une surface du troisième ordre.

([1]) Il est facile d'obtenir les droites situées sur les surfaces du faisceau, ces droites étant dans les faces du tétraèdre de référence. On peut reconnaître qu'il y a sur la surface correspondant à une valeur λ du paramètre variable quatre coniques situées sur la quadrique

$$128\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 + \gamma^2 Z^2) - \lambda^2 T^2 = 0.$$