BULLETIN DE LA S. M. F.

S. LATTÈS

Sur les multiplicité invariante par une transformation de contact

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 137-163
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__137_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES MULTIPLICITÉS INVARIANTES PAR UNE TRANSFORMATION DE CONTACT;

PAR M. S. LATTÈS.

INTRODUCTION.

La détermination des courbes, des surfaces ou, en général, des multiplicités invariantes par un *groupe continu* de transformations (transformations ponctuelles ou transformations de contact) est un des problèmes fondamentaux de la théorie de Lie : on obtient ces multiplicités invariantes, dans certains cas par des calculs purement algébriques, et dans d'autres cas par l'intégration d'équations différentielles ou de systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.

Si l'on considère, au contraire, une transformation *isolée*, la détermination des multiplicités invariantes se fait à l'aide d'équations fonctionnelles. J'ai commencé cette étude, dans un travail antérieur, pour les transformations ponctuelles à deux ou trois variables et pour les transformations de contact du plan (1). Certains des résultats peuvent s'étendre aux transformations ponctuelles à un nombre quelconque de variables, ainsi que je l'indique dans la deuxième Partie du présent Mémoire.

Mais, les résultats obtenus à ce sujet étant encore assez incomplets, le but que je me propose actuellement est surtout de montrer le lien qui existe entre les deux problèmes, le premier relatif aux transformations ponctuelles et le deuxième relatif aux transformations de contact. Pour les transformations ponctuelles, les ensembles invariants qu'on se propose de déterminer sont des

(1) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 1906).

variétés, c'est-à-dire des familles quelconques de points dépendant d'un certain nombre r de paramètres ; pour les transformations de contact, ce sont des *multiplicités,* c'est-à-dire des familles d'éléments à r paramètres assujetties à vérifier l'équation de Pfaff :

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_n\, dx_n = 0.$$

Une transformation de contact T de l'espace E à $n+1$ dimensions porte sur un élément de contact $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\,;\ z\,;\ p_1, p_2,\ \ldots,\ p_n)$ de cet espace qu'elle transforme en un élément $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\,;\ Z\,;\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n)$. Mais les formules qui définissent X_i, Z, P_i en fonction de x_i, z, p_i définissent en même temps une simple transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ d'un espace $\mathcal{E}$ à $2n+1$ dimensions pour lequel $(x_1, x_2, \ldots, x_n\,; z\,; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ seraient les $2n+1$ coordonnées d'un point.

Lorsqu'on passe de l'espace $\mathcal{E}$ à l'espace E, un point devient un élément; une famille de points formant une *variété* $\mathfrak{M}_r$ à r paramètres devient une famille d'éléments dépendant de r paramètres : mais cette famille ne constituera pas, en général, une *multiplicité* M_r de l'espace E, car ses éléments ne vérifieront pas l'équation de Pfaff.

Or il se trouve, et c'est ce que je me propose de démontrer par le présent Mémoire, que, *lorsqu'il s'agit des variétés* $\mathfrak{M}_r$ *invariantes par* $\mathfrak{T}$, *il y a certaines de ces variétés qui fournissent nécessairement des multiplicités* M_r *invariantes par* T : *la relation de Pfaff se trouve vérifiée d'elle-même.*

Ces variétés sont des variétés invariantes passant par un point double de la transformation; mais toutes les variétés invariantes passant par le point double ne remplissent pas la condition demandée, et voici par quoi sont caractérisées celles qui la remplissent.

Généralisant un résultat que j'avais établi précédemment pour les transformations de contact du plan, j'établis une relation entre les racines $S_1, S_2, S_3, \ldots$ de l'équation caractéristique relative à un point double : les racines s'associent deux à deux de façon que deux racines *associées* aient un produit constant C.

Je démontre cette proposition dans la première Partie.

Or, à chaque variété $\mathfrak{M}_r$ invariante correspond, ainsi que je l'établis dans la deuxième Partie, un groupe de racines $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_r$:

la variété correspondant à ce groupe vérifie l'équation de Pfaff si parmi les quantités $S_1, S_2, \ldots, S_r$ ne figurent ni C, ni des groupes de racines associées. Tel est le résultat que j'établis dans la troisième Partie. J'ai appliqué enfin ce qui précède à un exemple relatif à une transformation de contact de l'espace (x, y, z) [1].

I. — Transformation linéaire tangente a une transformation de contact en un élément double.

1. Considérons une transformation de contact T faisant correspondre à l'élément (x, y, z, p, q) un nouvel élément (X, Y, Z, P, Q) et soient $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ les coordonnées d'un *élément double* de la transformation, c'est-à-dire d'un élément qui coïncide avec son transformé. On peut toujours supposer que les cinq coordonnées de cet élément sont nulles : il suffit pour cela de poser simultanément

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x = x_0 + x_1, & y = y_0 + y_1, & z = z_0 + p_0 x_1 + q_0 y_1 + z_1, \\ X = x_0 + X_1, & Y = y_0 + Y_1, & Z = z_0 + p_0 X_1 + q_0 Y_1 + Z_1, \end{array} \right.$$

formules d'une transformation ponctuelle qui donne, lorsqu'on la prolonge,

$$(1\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p = p_0 + p_1, & q = q_0 + q_1, \\ P = p_0 + P_1, & Q = q_0 + Q_1. \end{array} \right.$$

En appliquant ces formules à la transformation T, elles fourniront une nouvelle transformation T_1 entre les éléments $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ et $(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1)$ et T_1 sera, comme T, une transformation de contact; en outre, T_1 admettra l'élément double $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Les quantités X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1 sont des fonctions de $x_1, y_1,$

---

[1] Dans les démonstrations, j'ai dû supposer les données et les solutions cherchées analytiques; certains des résultats pourraient être établis sous des hypothèses plus larges, mais à condition d'admettre certains résultats de l'étude des transformations ponctuelles que j'indique dans la deuxième Partie et que je n'ai établis jusqu'ici que dans l'hypothèse où je me place; j'ai cru donc indispensable de faire cette hypothèse, afin de n'avoir à m'appuyer que sur des résultats rigoureusement établis.

Un résumé de ce travail a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (avril 1909).

z_1, p_1, q_1 s'annulant en même temps que ces dernières : supposons, en outre, que ce soient des fonctions homolorphes dans le domaine de l'origine et considérons, en particulier, les termes du premier degré en x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 dans les trois premières quantités X_1, Y_1, Z_1. On a, en se servant des formules (1) et (1 *bis*),

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(\frac{\partial X}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial X}{\partial z_0}\right) x_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial X}{\partial z_0}\right) y_1 + \frac{\partial X}{\partial z_0} z_1 + \frac{\partial X}{\partial p_0} p_1 + \frac{\partial X}{\partial q_0} q_1 + \ldots,\\
Y_1 &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial Y}{\partial z_0}\right) x_1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial Y}{\partial z_0}\right) y_1 + \frac{\partial Y}{\partial z_0} z_1 + \frac{\partial Y}{\partial p_0} p_1 + \frac{\partial Y}{\partial q_0} q_1 + \ldots,\\
Z_1 &= A x_1 + B y_1 + C z_1 + D p_1 + E q_1 + \ldots,
\end{aligned}$$

avec les valeurs suivantes de A, B, C, D, E :

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial Z}{\partial z_0}\right) - p_0 \left(\frac{\partial X}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial X}{\partial z_0}\right) - q_0 \left(\frac{\partial Y}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial Y}{\partial z_0}\right),\\
B &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial Z}{\partial z_0}\right) - p_0 \left(\frac{\partial X}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial X}{\partial z_0}\right) - q_0 \left(\frac{\partial Y}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial Y}{\partial z_0}\right),\\
C &= \frac{\partial Z}{\partial z_0} - p_0 \frac{\partial X}{\partial z_0} - q_0 \frac{\partial Y}{\partial z_0},\\
D &= \frac{\partial Z}{\partial p_0} - p_0 \frac{\partial X}{\partial p_0} - q_0 \frac{\partial Y}{\partial p_0},\\
E &= \frac{\partial Z}{\partial q_0} - p_0 \frac{\partial X}{\partial q_0} - q_0 \frac{\partial Y}{\partial q_0}.
\end{aligned}$$

La transformation T étant une transformation de contact, on doit avoir l'identité

$$dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

où ρ désigne une fonction de x, y, z, p, q. On déduit de là les cinq relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial Z}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} - Q\frac{\partial Y}{\partial x} = -\rho p,\\
&\frac{\partial Z}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} - Q\frac{\partial Y}{\partial y} = -\rho q,\\
&\frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z} = \rho,\\
&\frac{\partial Z}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} - Q\frac{\partial Y}{\partial p} = 0,\\
&\frac{\partial Z}{\partial q} - P\frac{\partial X}{\partial q} - Q\frac{\partial Y}{\partial q} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace x, y, z, p, q par les coordonnées x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 de l'élément double, la troisième de ces relations donne

$$C = \rho_0,$$

et les quatre autres relations deviennent

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 0.$$

De là résulte la *forme réduite* que prend la transformation dans le domaine de l'élément double pris pour origine.

Si l'on écrit, pour simplifier l'écriture, $x, y, z, \ldots, X, Y, \ldots,$ au lieu de $x_1, y_1, z_1, \ldots, X_1, Y_1, \ldots,$ cette forme réduite est la suivante :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = a x + b y + c z + l p + m q + \ldots, \\ Y = a' x + b' y + c' z + l' p + m' q + \ldots, \\ Z = \qquad\qquad C z \qquad\qquad + \ldots, \\ P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda p + \mu q + \ldots, \\ Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' p + \mu' q + \ldots. \end{array} \right.$$

2. Si l'on réduit les seconds membres des équations (3) à leurs termes du premier degré, on obtient une transformation linéaire T' que nous appellerons la transformation linéaire *tangente* à la transformation de contact T en l'élément double (0, 0, 0, 0, 0).

Les coefficients de T' ne sont pas indépendants. Les seize coefficients

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & l, & m, \\ a', & b', & l', & m', \\ \alpha, & \beta, & \lambda, & \mu, \\ \alpha', & \beta', & \lambda', & \mu' \end{array}$$

sont, en effet, liés par six relations, de sorte qu'il n'y en a que dix d'arbitraires.

Pour obtenir ces relations, il suffit de partir des relations de Lie [1] qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que T soit une transformation de contact :

$$[XY] = [XZ] = [YZ] = [XQ] = [YP] = [PQ] = 0,$$
$$[PX] = [QY] = \rho, \qquad [PZ] = \rho P, \qquad [QZ] = \rho Q,$$

[1] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, chap. V.

et de remplacer dans ces relations x, y, z, p, q par zéro, en remarquant que $\rho_0 = C$. Certaines de ces relations sont alors identiquement vérifiées et les autres fournissent les six relations suivantes, qui sont les seules relations que doivent vérifier les coefficients des termes du premier degré de (3) pour que la transformation soit une transformation de contact :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} a\,l' - l\,a' + b\,m' - m\,b' &= 0,\\ a\,\lambda' - l\,\alpha' + b\,\mu' - m\,\beta' &= 0,\\ a'\lambda - l'\alpha + b'\mu - m'\beta &= 0,\\ \alpha\,\lambda' - \lambda\,\alpha' + \beta\,\mu' - \mu\,\beta' &= 0,\\ a\,\lambda - l\,\alpha + b\,\mu - m\,\beta &= C,\\ a'\lambda' - l'\alpha' + b'\mu' - m'\beta' &= C.\end{aligned}\right.$$

On peut remplacer le système (4) par un autre système de relations qui lui est équivalent et qu'on obtient en écrivant que les relations (2) vérifient les conditions d'intégrabilité relatives à la fonction Z, telles que, par exemple, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}$ et en remplaçant x, y, z, p, q par zéro dans ces conditions d'intégrabilité. Ce nouveau système équivalent à (4) est le suivant :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} a\beta - b\,\alpha + a'\beta' - b'\,\alpha' &= 0,\\ a\mu - m\alpha + a'\mu' - m'\alpha' &= 0,\\ b\lambda - l\,\beta + b'\lambda' - l'\,\beta' &= 0,\\ l\,\mu - m\lambda + l'\,\mu' - m'\lambda' &= 0,\\ a\lambda - l\,\alpha + a'\lambda' - l'\,\alpha' &= C,\\ b\mu - m\beta + b'\mu' - m'\beta' &= C.\end{aligned}\right.$$

Il se déduit du système (4) en échangeant les lignes et les colonnes dans le Tableau des seize coefficients.

Les substitutions linéaires T′ forment un groupe G : cela résulte immédiatement de ce que les transformations de contact T admettant l'élément double (0, 0, 0, 0, 0) forment elles-mêmes un groupe. Le groupe G contient d'abord les cinq paramètres $c, c', C, \gamma, \gamma'$ qui sont indépendants et il contient, en outre, seize paramètres liés par six relations, ce qui donne dix nouveaux paramètres indépendants. On peut, en particulier, se borner à considérer les transformations de contact en (x, p), c'est-à-dire les transformations dans lesquelles n'interviennent que les variables x, y, p, q

et X, Y, P, Q. Il suffit de prendre pour troisième équation (3) la relation $Z = Cz$ et de supposer que les quatre autres équations (3) ne contiennent pas z. On a alors

$$c = c' = \gamma = \gamma' = 0$$

et le groupe des substitutions linéaires T′ devient un groupe G′ à dix paramètres et à quatre variables.

Les propriétés que je viens de signaler [équivalence des systèmes (4) et (5), existence du groupe linéaire G′] se sont présentées par d'autres côtés dans l'étude des transformations de contact et aussi dans plusieurs autres questions : si je les signale ici avec quelque détail, c'est qu'il était indispensable de le faire pour la suite de ce travail. Dans un article publié dans ce recueil ([1]), M. Goursat a montré que les relations de Lie prenaient, avec des notations appropriées, les formes (4) et (5), et il a établi l'équivalence de ces deux systèmes (4) et (5). M. Goursat a en outre signalé un rapprochement curieux : un groupe tout pareil à G′, mais à coefficients a, b, l m entiers, n'est autre que le groupe considéré par Hermite dans son Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes ([2]).

Le groupe G′ est aussi, aux notations près, le groupe projectif qui transforme un complexe linéaire en lui-même, groupe étudié par Sophus Lie ([3]) (il suffit de considérer x, y, p, q comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace pour identifier les deux groupes). La liaison de ce dernier groupe avec le groupe des transformations de contact *du plan* a été mise en évidence par Sophus Lie ([4]). Il nous apparaît ici comme relié également au groupe des transformations de contact *de l'espace* ayant un élément invariant donné.

3. Considérons la transformation du contact (3) comme une

([1]) GOURSAT, *Sur un groupe de transformations* (*Bull. Soc. math.*, t. XXX, 1902).

([2]) HERMITE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1855, et *Œuvres complètes*, t. I, p. 444.

([3]) SOPHUS LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Chap. VI, § 3, Satz 22.

([4]) SOPHUS LIE, *Geometrie der Berühungstransformationen*, Chap. VI, § 5, et *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, Chap. XXIV.

transformation ponctuelle de l'espace à 5 dimensions (x, y, z, p, q). Lorsqu'on veut étudier une transformation ponctuelle dans le domaine d'un point double où la transformation est régulière, il est nécessaire, dans la plupart des problèmes qui se posent à ce sujet, de considérer les quantités qu'on appelle les *racines de l'équation en* S relative au point double, ou encore les *multiplicateurs* (¹) de la transformation relatifs au point double considéré : ce sont, pour la transformation (3), les racines de l'équation

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a-\mathrm{S} & b & c & l & m \\ a' & b'-\mathrm{S} & c' & l' & m' \\ 0 & 0 & \mathrm{C}-\mathrm{S} & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \lambda-\mathrm{S} & \mu \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' & \mu'-\mathrm{S} \end{vmatrix} = 0.$$

Une propriété fondamentale de ces multiplicateurs (vraie pour une transformation ponctuelle quelconque à n variables) est la suivante : ce sont des *invariants* de la transformation à l'égard du groupe des transformations ponctuelles admettant le même point double que la transformation donnée et régulières en ce point. La démonstration de cette proposition est presque immédiate : on voit de suite qu'on peut, pour l'établir, se borner à considérer les transformations *linéaires* tangentes et l'on tombe alors sur une propriété connue des substitutions linéaires et homogènes.

Pour les transformations de contact du plan, l'équation en S est du troisième degré et j'ai démontré dans un travail antérieur (²) que l'un des trois multiplicateurs est alors égal au produit des deux autres.

Une propriété analogue peut être établie pour les transformations de contact de l'espace.

Théorème. — *Lorsque la transformation* (3) *est une transformation de contact, l'un de ses multiplicateurs* [*racines de*

(¹) C'est ainsi que les désigne M. Levi-Civita dans son Mémoire sur la stabilité des transformations ponctuelles (*Annali di Matematica*, série III, t. V, 1901).

(²) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica,* 1906, Chap. VI, § 30).

l'équation (6)] *est* C *et les quatre autres sont de la forme*

$$S_1, \quad S_2, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2},$$

c'est-à-dire qu'ils s'associent deux à deux de façon que le produit de deux multiplicateurs associés soit égal au multiplicateur C.

En effet, l'une des racines de l'équation (6) est évidemment

$$S = C$$

et les quatre autres racines sont racines de l'équation obtenue en supprimant la troisième ligne et la troisième colonne dans le déterminant (6). Dans cette nouvelle équation n'interviennent pas les coefficients c, c', γ, γ', et ces coefficients n'interviennent pas non plus dans les relations fondamentales (6) : on peut donc les supposer nuls pour établir la proposition. Considérons alors la substitution linéaire

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} X = a\,x + b\,y + l\,p + m\,q, \\ Y = a'x + b'y + l'\,p + m'q, \\ P = \alpha\,x + \beta\,y + \lambda\,p + \mu\,q, \\ Q = \alpha'x + \beta'y + \lambda'p + \mu'\,q, \end{array}\right.$$

dans laquelle les seize coefficients sont liés par les relations (4) ou les relations équivalentes (5), et soient S_1, S_2, S_3, S_4 les quatre multiplicateurs de cette substitution. Si l'on résout les équations (7) par rapport à x, y, p, q, on obtiendra la substitution inverse de (7) et les multiplicateurs de cette substitution seront

$$\frac{1}{S_1}, \quad \frac{1}{S_2}, \quad \frac{1}{S_3}, \quad \frac{1}{S_4}.$$

Cette résolution s'effectue simplement en se servant des relations (5). Pour avoir x, par exemple, il suffit de former la combinaison linéaire $\lambda X + \lambda' Y - lP - l'Q$: dans cette combinaison les coefficients de y, z, p, q sont nuls en vertu des relations (5). On a d'une façon analogue y, z, p, q en se servant des relations (5) et la substitution inverse de (7) est la suivante :

$$\begin{aligned} Cx &= \lambda X + \lambda' Y - l' P - l' Q,\\ Cy &= \mu X + \mu' Y - m P - m' Q,\\ Cp &= -\alpha X - \alpha' Y + a P + a' Q,\\ Cq &= -\beta X - \beta' Y + b P + b' Q. \end{aligned}$$

Appliquons à cette substitution la transformation linéaire (¹)

$$\begin{array}{llll} x = p_1, & y = q_1, & p = -x_1, & q = -y_1,\\ X = P_1, & Y = Q_1, & P = -X_1, & Q = -Y_1. \end{array}$$

A cause de la propriété d'invariance des multiplicateurs signalée plus haut, la nouvelle substitution aura encore pour multiplicateurs

$$\frac{1}{S_1}, \quad \frac{1}{S_2}, \quad \frac{1}{S_3}, \quad \frac{1}{S_4}.$$

Or cette nouvelle substitution est la suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha}{C} P_1 + \frac{\alpha'}{C} Q_1 + \frac{a}{C} X_1 + \frac{a'}{C} Y_1,\\ y_1 &= \frac{\beta}{C} P_1 + \frac{\beta'}{C} Q_1 + \frac{b}{C} X_1 + \frac{b'}{C} Y_1,\\ p_1 &= \frac{\lambda}{C} P_1 + \frac{\lambda'}{C} Q_1 + \frac{l}{C} X_1 + \frac{l'}{C} Y_1,\\ q_1 &= \frac{\mu}{C} P_1 + \frac{\mu'}{C} Q_1 + \frac{m}{C} X_1 + \frac{m'}{C} Y_1, \end{aligned}$$

et ses multiplicateurs sont donnés par l'équation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a - CS & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' - CS & \beta & \beta' \\ l & l' & \lambda - CS & \lambda' \\ m & m' & \mu & \mu' - CS \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) Cette transformation est la transformation linéaire tangente à la transformation par polaires réciproques prise sous la forme

$$x = p_1, \quad y = q_1, \quad z = z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1, \quad p = -x_1 \quad q = -y_1,$$

dite *transformation de Legendre*.

Si l'on échange les lignes et les colonnes et si l'on pose

$$CS = \sigma,$$

l'équation en σ est identique à l'équation en S primitive [l'équation (6) dans laquelle on a supprimé la troisième ligne et la troisième colonne]. Elle a donc pour racines

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4,$$

et par suite l'équation (8) admet pour racines

$$\frac{S_1}{C}, \quad \frac{S_2}{C}, \quad \frac{S_3}{C}, \quad \frac{S_4}{C}.$$

D'autre part, nous venons de voir que ces mêmes racines sont aussi

$$\frac{1}{S_1}, \quad \frac{1}{S_2}, \quad \frac{1}{S_3}, \quad \frac{1}{S_4}.$$

Donc, si S_1 est racine de l'équation (6), $\frac{C}{S_1}$ est aussi racine, et le théorème est démontré.

4. Tout ce qui précède s'étend immédiatement aux transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions, et c'est uniquement pour simplifier les notations que j'ai supposé $n = 2$ dans ce qui précède : les raisonnements et la marche des calculs sont les mêmes dans le cas général.

Énonçons les résultats pour une transformation de contact quelconque.

Dans le domaine d'un élément double, une pareille transformation peut être ramenée à la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} X_i = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^n x_n + c_i z + l_i^1 p_1 + l_i^2 p_2 + \ldots + l_i^n p_n + \ldots, \\ Z = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots, \\ P_i = \alpha_i^1 x_1 + \alpha_i^2 x_2 + \ldots + \alpha_i^n x_n + \gamma_i z + \lambda_i^1 p_1 + \lambda_i^2 p_2 + \ldots + \lambda_i^n p_n + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Les $4n^2$ coefficients a_i, l_i, α_i, λ_i sont liés par des relations en nombre $n(2n-1)$ auxquelles on peut donner deux formes équivalentes, analogues aux formes (4) et (5) (1). Les transformations linéaires tangentes aux transformations de contact en un élément double forment un groupe.

Enfin, les multiplicateurs de la transformation linéaire tangente sont tels que, si S est un multiplicateur, $\frac{C}{S}$ l'est aussi : les $2n+1$ multiplicateurs sont de la forme

$$C, \quad S_1, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{S_n}.$$

II. — Variétés invariantes par une transformation ponctuelle.

5. D'après la méthode indiquée dans l'Introduction, nous devons, avant d'étudier les transformations de contact, considérer d'abord une transformation ponctuelle à un nombre quelconque n de variables dans le domaine d'un point double et rechercher les variétés à un nombre quelconque r de paramètres invariantes par la transformation et contenant le point double. Ce sont les résultats qu'on possède relativement à cette question que je voudrais indiquer ici pour les appliquer ensuite aux transformations de contact.

6. En première approximation, le problème qui nous occupe peut être ramené à un problème analogue relatif à des transformations linéaires et homogènes.

Soit, en effet, une variété $\mathfrak{M}_r$ à r paramètres invariante par transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ à n variables. Nous supposons que $\mathfrak{M}_r$ est définie dans le domaine du point double de $\mathfrak{T}$ pris pour origine et que $n-r$ des coordonnées d'un point de $\mathfrak{M}_r$ peuvent s'exprimer par des fonctions des r autres coordonnées, holomorphes dans ce domaine et nulles à l'origine. On pourra, pour plus de symétrie dans les notations, exprimer les n coordonnées d'un point quelconque de $\mathfrak{M}_r$ en fonction de r paramètres u_1,

(1) M. Goursat donne ces deux systèmes de relations et démontre leur équivalence dans le Mémoire cité plus haut.

$u_2, \ldots, u_r$ (coordonnées curvilignes de ce point) :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1^1 u_1 + \alpha_1^2 u_2 + \ldots + \alpha_1^r u_r + \ldots, \\
x_2 &= \alpha_2^1 u_1 + \alpha_2^2 u_2 + \ldots + \alpha_2^r u_r + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_n &= \alpha_n^1 u_1 + \alpha_n^2 u_2 + \ldots + \alpha_n^r u_r + \ldots.
\end{aligned}
$$

Si l'on réduit ces équations à leurs termes du premier degré, on obtient les équations paramétriques de la variété linéaire $\mathfrak{M}'_r$ *tangente* à $\mathfrak{M}_r$ à l'origine. On peut évidemment énoncer le résultat suivant :

Si la variété $\mathfrak{M}_r$ est invariante par la transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$, la variété linéaire $\mathfrak{M}'_r$ tangente à $\mathfrak{M}_r$ est invariante par la transformation linéaire $\mathfrak{T}'$ tangente à $\mathfrak{T}$.

Occupons-nous donc tout d'abord des transformations $\mathfrak{T}'$ et des variétés linéaires $\mathfrak{M}'_r$ invariantes par $\mathfrak{T}'$.

La transformation $\mathfrak{T}'$ fait correspondre au point $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ de la variété $\mathfrak{M}'_r$ un nouveau point $(U_1, U_2, \ldots, U_r)$ de la même variété, et $U_1, U_2, \ldots, U_r$ s'expriment évidemment en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_r$ par des relations linéaires et homogènes qui constituent une transformation linéaire Θ'; cette transformation linéaire est tangente à la transformation ponctuelle Θ qui relie un point de $\mathfrak{M}_r$ défini par $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ et son transformé défini par $(U_1, U_2, \ldots, U_r)$.

A la transformation Θ' ainsi définie (ou à Θ) correspondent r multiplicateurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ racines d'une équation de degré r La théorie des transformations linéaires nous permet d'énoncer le résultat fondamental suivant :

Les multiplicateurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ de la transformation Θ font partie de l'ensemble des multiplicateurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de la transformation T (¹).

Bien entendu, les transformations Θ et Θ' ne sont pas complètement définies, puisqu'elles dépendent du choix des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_r$; mais, si l'on change de paramètres, les multiplica-

---

(¹) *Voir*, par exemple, PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi*, Chap. IV, § 83.

teurs σ_1, σ_2, ..., σ_r, qui sont des invariants (§ 3), ne changent pas et l'énoncé précédent a un sens précis. Nous dirons que σ_1, σ_2, ..., σ_r *sont les multiplicateurs relatifs à la variété invariante* $\mathfrak{M}_r$.

7. Voyons maintenant comment on procédera à la détermination des variétés invariantes $\mathfrak{M}_r$ elles-mêmes. Parmi les multiplicateurs

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

de la transformation ponctuelle T, nous choisirons r multiplicateurs, les S premiers par exemple,

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_r.$$

La variété invariante $\mathfrak{M}_r$ qui admet ces multiplicateurs, si elle existe, est fournie par un système d'équations fonctionnelles, et, si l'on cherche à la définir par les développements de $n-r$ des coordonnées en séries entières ordonnées par rapport aux r autres coordonnées, le calcul des coefficients des séries est possible et d'une façon unique, à condition :

1° Que S_1, S_2, ..., S_r soient distincts;

2° Qu'on n'ait aucune égalité de la forme

$$S_{r+i} = S_1^{\alpha} S_2^{\beta} \ldots S_r^{\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-r); \; (\alpha, \beta, \ldots, \lambda \text{ entiers} \geqq 0)$$

entre les multiplicateurs (¹), et l'on obtient alors des développements parfaitement déterminés.

Il reste à voir si ces développements sont convergents. La convergence peut être établie, comme je l'ai montré pour $n = 2$, $n = 3$ dans le Mémoire indiqué en note, si l'on suppose $|S_1|$, $|S_2|$, ..., $|S_r|$ tous inférieurs ou tous supérieurs à 1 et différents de zéro : la méthode suivie pour $n = 2$, $n = 3$ s'applique entièrement. Mais, si ces r multiplicateurs sont les uns inférieurs à 1, les autres supérieurs à 1 en module, la question reste en suspens et

(¹) Ces conditions s'obtiennent par des calculs analogues à ceux que j'ai développés pour $n = 2$, $n = 3$ dans le Mémoire indiqué plus haut (*Sur les équations fonctionnelles, etc.*, Chap. II, § 17 et 18).

aucun résultat précis à ce sujet n'a été établi jusqu'ici à ma connaissance.

On voit d'après cela que, s'il s'agit des courbes (variétés à 1 paramètre $r = 1$), il y a, sous les conditions énoncées, n courbes analytiques et n seulement passant par le point double : ici une seule quantité $|S_i|$ intervient et c'est pourquoi on peut énoncer un résultat précis ([1]).

Pour les variétés à deux paramètres, il faut associer les n multiplicateurs deux à deux, ce qui fournit $\frac{n(n-1)}{2}$ solutions possibles : mais ici la question de la convergence des développements formels reste en suspens et l'on peut dire seulement qu'il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ solutions au plus, les seules de ces solutions dont on puisse affirmer l'existence étant celles qui correspondent à deux quantités $|S_i|$, $|S_j|$, toutes les deux inférieures ou toutes les deux supérieures à 1 C'est ainsi que, dans l'espace à trois dimensions, on peut toujours affirmer l'existence d'une surface invariante au moins et de trois au plus (sous les hypothèses faites plus haut). Dans l'espace à cinq dimensions, il y aura au plus dix variétés $\mathfrak{M}_r$ invariantes et elles existeront sûrement toutes, si les cinq multiplicateurs sont tous inférieurs ou tous supérieurs à 1.

III. — Multiplicités invariantes par une transformation de contact.

8. *Courbes invariantes par une transformation de contact.* — Avant d'aborder le cas général d'une multiplicité quelconque, étudions le cas particulier des courbes (ou plutôt des multiplicités à un paramètre) invariantes par une transformation de contact et contenant un élément double.

Dans mon précédent Mémoire, j'ai étudié le cas des transformations de contact *du plan*. Les variables x, y, y' étant au nombre de trois, on est conduit à considérer d'abord x, y, y' comme les

---

(1) Le problème a été posé et résolu pour $n = 2$ par M. Poincaré; j'ai étendu la solution à n quelconque dans le travail précédent, où l'on trouvera des renseignements bibliographiques à ce sujet.

coordonnées d'un point de l'espace. Soient S, $\frac{C}{S}$ et C les multiplicateurs de la transformation (§ 3). A chaque multiplicateur correspond une courbe de l'espace invariante et contenant le point double. J'ai démontré qu'en général chacune des deux courbes correspondant à S et à $\frac{C}{S}$ fournit, en interprétant x, y, y' comme les coordonnées d'un élément du plan, une courbe invariante par la transformation de contact et contenant l'élément double. En d'autres termes, si

$$\begin{aligned} y &= \psi(x), \\ y' &= \theta(x) \end{aligned}$$

sont les équations de la courbe de l'espace, on a nécessairement

$$\theta(x) \equiv \frac{d\psi}{dx}.$$

La démonstration que j'ai donnée de cette proposition consistait en une simple vérification ([1]). Les séries qui donnent $\psi(x)$ et $\theta(x)$ étant calculées, on constate, par le calcul même des coefficients de ces séries, que $\theta(x)$ est la dérivée de $\psi'(x)$.

On peut établir la proposition par une autre méthode qui me paraît plus simple et plus satisfaisante, parce qu'elle ne consiste plus en une simple vérification. Cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables : c'est pourquoi j'aborde tout de suite le cas général.

Soit donnée la transformation de contact (9) de l'espace à $n+1$ dimensions définie dans le domaine d'un élément double pris pour origine. Soient

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad C, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{S_n}$$

les multiplicateurs de cette transformation.

Si l'on considère $x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme les coordonnées d'un point d'un espace à $2n+1$ dimensions, on obtient, en général, $2n+1$ courbes analytiques (variétés à un paramètre) invariantes par la transformation et passant par l'origine (§ 7). Chacune d'elles correspond à un multiplica-

([1]) *Sur les équations fonctionnelles, etc.*, Chap. VI, § 30.

teur (§ 6). Nous nous proposons de montrer que, si l'on excepte la courbe correspondant au multiplicateur C, les autres fournissent chacune une *multiplicité* (1) de l'espace à $n+1$ dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, invariante par la transformation de contact, c'est-à-dire que l'on a

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n \equiv 0.$$

Les $2n+1$ coordonnées d'un point d'une courbe invariante γ sont des fonctions d'un même paramètre t. On a donc

$$(10) \qquad dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = \varphi(t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant une certaine fonction de t, et il s'agit de prouver que $\varphi(t)$ se réduit à zéro.

Lorsqu'on passe d'un point à son transformé, t prend une certaine valeur T, fonction holomorphe de t dans le domaine de l'origine, et l'on a

$$T \equiv St + \ldots,$$

S étant le multiplicateur relatif à la courbe invariante γ (§ 6).

On aura

$$dZ - P_1\,dX_1 - P_2\,dX_2 - \ldots - P_n\,dX_n = \varphi(T)\,dT.$$

Mais la transformation étant une transformation de contact, on a

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n \equiv (C + \ldots)(dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n).$$

Par suite,

$$\varphi(T)\,dT \equiv (C + \ldots)\,\varphi(t)\,dt$$

ou

$$\varphi(T) \equiv \left(\frac{C}{S} + \ldots\right)\varphi(t),$$

les termes non écrits s'annulant pour $t = 0$.

La fonction φ vérifie donc une équation fonctionnelle de la forme

$$(11) \qquad \varphi[\lambda(t)] \equiv f(t)\,\varphi(t)$$

(1) Une pareille multiplicité est une *bande* constituée par les points d'une courbe de l'espace à n dimensions et par les plans tangents à une développable passant par la courbe.

avec

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda(t) \equiv St + \ldots, \\ f(t) \equiv \dfrac{C}{S} + \ldots, \end{cases}$$

les termes de degré minimum étant seuls écrits.

L'équation (11) appartient à un type d'équations fonctionnelles étudiées par M. Kœnigs ([1]). On peut aussi remarquer qu'elle définit une courbe $u = \varphi(t)$ invariante par la transformation

$$T = \lambda(t), \qquad U = f(t)\,u$$

et appliquer les résultats généraux relatifs à ces courbes ([2]).

Des hypothèses faites sur C et S ($C \neq S^\alpha$, α entier $\geqq 0$; $S \neq 1 \neq 0$), il résulte que l'équation (11) n'admet pas d'autre solution holomorphe dans le domaine de $t = 0$ que la solution nulle

$$\varphi(t) = 0,$$

d'où, en se reportant à la définition de $\varphi(t)$ [équat. (10)],

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n \equiv 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Mais, bien entendu, la démonstration ne s'applique qu'aux courbes γ correspondant aux multiplicateurs

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{S_n}.$$

Elle ne s'applique pas à la courbe γ correspondant au multiplicateur C, car, si l'on donne à S la valeur C, les équations (12) montrent que $f(0) = 1$, et alors il n'est plus exact que l'équation (11) n'ait pas d'autre solution holomorphe que la solution nulle, comme on peut s'en rendre compte en se reportant aux Mémoires cités plus haut.

En définitive, *il y a dans le cas général* $2n$ *multiplicités à un paramètre* (*bandes formées des points d'une courbe et des plans tangents à une développable passant par la courbe*) *inva-*

([1]) Kœnigs, *Recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884).

([2]) *Sur les équations fonctionnelles, etc.*, Chap. II.

riantes par la tranformation de contact (9) *et contenant l'élément double pris pour origine.*

9. *Multiplicités* M_2 *à deux paramètres invariantes par une transformation de contact.* — Les raisonnements du paragraphe précédent peuvent s'étendre aux multiplicités M_r à r paramètres invariantes par une transformation de contact à un nombre quelconque de variables. Mais, pour plus de netteté, nous ferons le raisonnement sur les multiplicités M_2 à deux paramètres.

Nous donnons toujours une double interprétation aux formules (9). Si $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les coordonnées d'un point de l'espace à $2n+1$ dimensions, elles définissent une transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ et nous considérons alors les variétés $\mathfrak{M}_2$ invariantes par $\mathfrak{T}$. Si, au contraire, les mêmes variables représentent un élément de contact de l'espace à $n+1$ dimensions, elles définissent par hypothèse une transformation de contact T, et ce sont alors les multiplicités M_2 invariantes par T qu'il s'agit de déterminer. Lorsqu'on passe de la deuxième interprétation à la première, toute M_2 invariante par T fournit une $\mathfrak{M}_2$ invariante par $\mathfrak{T}$. *La réciproque est vraie pour certaines* $\mathfrak{M}_2$, *celles dont les multiplicateurs* (§ 6) *ne sont ni des multiplicateurs associés* $\left(\textit{c'est-à-dire de la forme } S_i \dfrac{C}{S_i}\right)$, *ni le multiplicateur* C.

Avant d'établir ce résultat, remarquons que dans le cas actuel il y a certainement des couples de deux multiplicateurs qui ne remplissent pas la condition 2° du paragraphe 7 : ce sont les couples de multiplicateurs associés. Pour un pareil couple, le calcul formel des coefficients des séries qui définissent la variété $\mathfrak{M}_2$ correspondante est ou impossible ou indéterminé. Cela résulte aisément de ce que le produit de deux multiplicateurs est égal à C qui est l'un des autres multiplicateurs. Nous écartons du raisonnement les $\mathfrak{M}_2$ correspondant à de pareils multiplicateurs, s'il en existe; d'ailleurs, même s'il en existe, la proposition tombe en défaut pour de pareilles variétés, comme on peut le voir sur des exemples.

Soient donc une variété $\mathfrak{M}_2$ invariante par $\mathfrak{T}$ et S, S′ les multiplicateurs correspondants dont nous supposons le produit différent de C, puisque ce ne sont pas des multiplicateurs associés. S, S′

appartiennent à l'ensemble des multiplicateurs de (9) :

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{S_n},$$

le multiplicateur C étant écarté conformément à l'énoncé du résultat à établir. Nous supposons d'ailleurs que S et S′ vérifient les hypothèses faites en général au paragraphe 7 pour les multiplicateurs S_1, S_2, ..., S_n d'une variété invariante. En particulier, S et S′ sont distincts.

Les $2n+1$ coordonnées d'un point de $\mathfrak{M}_2$ sont des fonctions de deux paramètres t, t', et, lorsqu'on passe d'un point de $\mathfrak{M}_2$ à son transformé, t, t' prennent de nouvelles valeurs T, T′ qui sont des fonctions holomorphes de t, t'. Comme S, S′ sont distincts, on peut mettre ces fonctions sous la forme canonique

$$(13) \qquad \begin{cases} T = S\,t + \ldots, \\ T' = S' t' + \ldots, \end{cases}$$

en effectuant un même changement de paramètres linéaire sur t, t' d'une part, et T, T′ d'autre part.

On a

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = \lambda(t, t')\,dt + \mu(t, t')\,dt',$$

λ et μ étant deux fonctions de t et de t'. De même

$$dZ - P_1\,dX_1 - P_2\,dX_2 - \ldots - P_n\,dX_n = \lambda(T, T')\,dT + \mu(T, T')\,dT',$$

et l'identité

$$dZ - P_1\,dX_1 - P_2\,dX_2 - \ldots - P_n\,dX_n \equiv (C + \ldots)(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n),$$

qui exprime que la transformation est une transformation de contact, nous donne

$$\lambda(T, T')\,dT + \mu(T, T')\,dT' \equiv (C + \ldots)\,[\lambda(t, t')\,dt + \mu(t, t')\,dt'],$$

le premier facteur du second membre étant une fonction de t et de t', qui se réduit à C pour $t = t' = 0$. L'identité précédente fournit pour λ et μ un système de deux équations fonctionnelles analogues à l'équation (11),

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda(T, T')\dfrac{\partial T}{\partial t} + \mu(T, T')\dfrac{\partial T'}{\partial t} \equiv (C + \ldots)\,\lambda(t, t'), \\[2mm] \lambda(T, T')\dfrac{\partial T}{\partial t'} + \mu(T, T')\dfrac{\partial T'}{\partial t} \equiv (C + \ldots)\,\mu(t, t'), \end{cases}$$

dans lesquelles on suppose que T et T′ sont remplacées par leurs valeurs en fonction de t, t' données par le système (13). Il s'agit de prouver que le système (14) donne pour λ et μ un système unique de fonctions holomorphes dans le domaine t, $t' = 0$. La solution unique sera alors $\lambda = \mu = 0$.

On pourrait traiter ces équations par une méthode analogue à celle que M. Kœnigs a employée pour l'équation (11). Mais on peut aussi rattacher la solution à la théorie générale des variétés invariantes par une transformation ponctuelle, théorie étudiée précédemment au paragraphe 7. Remarquons pour cela que le système (14) définit dans l'espace à quatre dimensions (u, v, t, t') une variété

$$u = \lambda(t, t'), \qquad v = \mu(t, t'),$$

invariante par la transformation

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T} = \mathrm{S}\,t + \ldots, \\ \mathrm{T}' = \mathrm{S}'t' + \ldots, \\ \mathrm{U}(\mathrm{S} + \ldots) + \mathrm{V}(\ldots\ldots\ldots) = (\mathrm{C} + \ldots)u, \\ \mathrm{U}(\ldots\ldots\ldots) + \mathrm{V}(\mathrm{S}' + \ldots) = (\mathrm{C} + \ldots)v, \end{array} \right.$$

les termes non écrits étant du second degré au moins en t, t' pour les deux premières équations, et du premier degré au moins pour les deux dernières. Le système (15) résolu par rapport à T, T′, U, V s'écrit

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T} = \mathrm{S}\,t + \ldots, \\ \mathrm{T}' = \mathrm{S}'t' + \ldots, \\ \mathrm{U} = \left(\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} + \ldots\right)u + (\ldots\ldots\ldots)v, \\ \mathrm{V} = (\ldots\ldots\ldots)\,u + \left(\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}'} + \ldots\right)v. \end{array} \right.$$

La transformation linéaire tangente à (16) est la suivante :

$$\mathrm{T} = \mathrm{S}t, \qquad \mathrm{T}' = \mathrm{S}'t', \qquad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}}u, \qquad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}'}v,$$

de sorte que la transformation (16) admet pour multiplicateurs

$$\mathrm{S}, \quad \mathrm{S}', \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}}, \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}'}.$$

En vertu des hypothèses faites sur S, S′, on voit que ces multiplicateurs sont différents et qu'aucun d'eux n'est le produit de puissances à exposants entiers des autres multiplicateurs. Il résulte alors de la théorie générale exposée au paragraphe 7 qu'on peut calculer d'une façon unique les coefficients des développements formels qui définissent une variété de la forme

$$u = \lambda(t, t'), \qquad v = \mu(t, t'),$$

invariante par le système (16) et telle que λ, μ soient des fonctions holomorphes de t et de t'. Il n'y a pas à se préoccuper ici de la convergence des séries, car la solution *unique* apparaît d'une façon évidente sur les équations (16) : c'est la solution

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

Par suite, on a

$$\lambda(t, t') \equiv 0, \qquad \mu(t, t') \equiv 0,$$

d'où

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_n\, dx_n = 0,$$

et la proposition à démontrer est établie [1].

Dans cette démonstration, S, S′ représentent deux des nombres de la suite

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \frac{C}{S_1}, \quad \frac{C}{S_2}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{S_n},$$

choisis de telle façon que leur produit ne soit pas égal à C. Dans le cas contraire, on peut voir sur des exemples que la proposition tombe en défaut.

Ainsi, parmi les variétés $\mathfrak{M}_2$ *invariantes par la transformation* $\mathfrak{S}$, *celles dont les multiplicateurs ne sont ni des multiplicateurs associés, ni le multiplicateur* C, *fournissent seules, en général, des multiplicités* M_2 *invariantes par la transformation de contact* T.

---

(1) Dans la Note des *Comptes rendus* (avril 1909) où je résume cette théorie, j'indiquais une démonstration plus simple fondée sur ce fait connu qu'on peut ramener une transformation ponctuelle à deux variables à la forme canonique $T = St$, $T' = S't'$. Mais ce résultat n'est démontré que dans le cas où $|S|$, $|S'|$ sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1 ; c'est pourquoi j'ai modifié la démonstration en me servant de la forme canonique (13), qui est valable dans tous les cas.

10. *Cas général d'une multiplicité* M_r *à* r *paramètres invariante par une transformation de contact.*

La méthode que nous venons d'appliquer aux multiplicités M_2 s'étend sans difficulté au cas général, et il suffira d'énoncer le résultat.

Parmi les variétés $\mathfrak{M}_r$ *à* r *paramètres invariantes par la transformation ponctuelle* $\mathfrak{T}$, *celles qui n'admettent pour multiplicateurs ni* C, *ni des couples de multiplicateurs de produit* C, *sont les seules, en général, qui fournissent des multiplicités* M_r *invariantes par la transformation de contact* T.

Bien entendu, il s'agit toujours de multiplicités invariantes définies dans le domaine d'un élément double de la transformation, qui est définie par les équations (9). On fait toujours sur les multiplicateurs relatifs à $\mathfrak{M}_r$ les hypothèses énoncées au paragraphe 7, et les multiplicités invariantes qu'on cherche sont telles que $2n+1-r$ des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n$, s'expriment par des fonctions holomorphes des r autres coordonnées. Le nombre r est au plus égal à n, puisque, s'il était supérieur, deux des multiplicateurs auraient pour produit C, ou bien l'un d'eux serait égal à C, et la proposition tomberait en défaut; on sait, d'ailleurs, qu'une multiplicité vérifiant l'équation de Pfaff

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0$$

dépend au plus de n paramètres.

IV. — Exemple.

Soient données les équations

$$\begin{aligned}
X &= ax + p,\\
Y &= by + q,\\
Z &= 2abz + bp^2 + aq^2,\\
P &= 2bp,\\
Q &= 2aq.
\end{aligned}$$

On a l'identité

$$dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv 2ab(dz - p\,dx - q\,dy),$$

de sorte que les équations précédentes définissent une transformation de contact T.

L'origine est point double et les multiplicateurs sont

$$a, \quad b, \quad 2ab, \quad 2a, \quad 2b.$$

Le multiplicateur C de la théorie générale est $2ab$, et, conformément à cette théorie, les autres multiplicateurs s'associent deux à deux, a et $2b$, b et $2a$, de façon que deux multiplicateurs associés aient pour produit $2ab$.

Déterminons d'abord les multiplicités à un paramètre M_1 (ou *bandes*) invariantes par T. Pour cela, considérons d'abord la transformation T comme une transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ de l'espace à cinq dimensions.

Si a et b sont quelconques, il y a cinq variétés, $\mathfrak{M}_1$ à un paramètre, et cinq seulement invariantes par $\mathfrak{T}$, chacune correspondant à l'un des cinq multiplicateurs. On les détermine aisément par la méthode des coefficients indéterminés et l'on obtient les résultats suivants; en regard de chaque résultat est inscrit entre parenthèses le multiplicateur correspondant; chaque variété est définie par quatre équations.

Variétés $\mathfrak{M}_1$.

(I)	(a)	$y = 0,$	$z = 0,$	$p = 0,$	$q = 0,$
(II)	(b)	$x = 0,$	$z = 0,$	$p = 0,$	$q = 0,$
(III)	$(2a)$	$x = 0,$	$y = \dfrac{q}{2a - b},$	$p = 0,$	$z = \dfrac{q^2}{2(2a - b)},$
(IV)	$(2b)$	$x = \dfrac{p}{2b - a},$	$y = 0,$	$q = 0,$	$z = \dfrac{p^2}{2(2b - a)},$
(V)	$(2ab)$	$x = 0,$	$y = 0,$	$p = 0,$	$q = 0.$

D'après la théorie générale, les quatre premières variétés seulement fournissent des multiplicités invariantes par la transformation de contact. Ces multiplicités sont des *bandes* invariantes. Les deux premières bandes sont formées de tous les points de Ox ou de Oy et du plan xOy qui passe par ces deux droites. La troisième bande est formée de tous les points d'une parabole :

$$x = 0, \qquad z = \frac{y^2(2a - b)}{2}$$

et des plans tangents à cette parabole perpendiculaires au plan yOz. La quatrième bande est analogue à la précédente; elle est formée d'une parabole et de plans tangents à la parabole.

La famille d'éléments (V), au contraire, qui correspond au multiplicateur C de la théorie générale, ne constitue pas une bande.

Pour certaines valeurs particulières de a et de b, le calcul formel donne une infinité de solutions correspondant à un même multiplicateur. C'est ainsi que, si l'on a

$$b = a^2,$$

la famille (I) correspondant à a est la suivante :

$$y = \alpha x^2, \qquad z = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0 \qquad (\alpha \text{ arbitraire}).$$

Elle constitue encore, quel que soit α, une multiplicité invariante; si l'on obtient une indétermination, cela tient à ce que l'un des multiplicateurs b est le carré du multiplicateur a (§ 7).

On voit aisément que les raisonnements du paragraphe 8 s'appliquent encore ici. Dans d'autres exemples, le calcul formel pourrait donner une impossibilité au lieu d'une indétermination. Pour simplifier, nous allons supposer, pour le cas des $\mathfrak{M}_2$ invariantes, que a et b sont quelconques, et alors les circonstances analogues à la précédente ne se présenteront pas dans le calcul formel.

Pour chercher les variétés $\mathfrak{M}_2$ invariantes, il faut associer les multiplicateurs deux à deux, ce qui donne dix familles correspondant aux groupements :

(I, II, III, IV).......	(a, b),	$(a, 2a)$,	$(b, 2b)$,	$(2a, 2b)$,
(V, VI)............	$(a, 2b)$,	$(b, 2a)$,		
(VII, VIII, IX, X)...	$(2ab, a)$,	$(2ab, b)$,	$(2ab, 2a)$,	$(2ab, 2b)$.

Les groupements V, VI présentent une particularité : le produit des deux multiplicateurs $a \times 2b$ ou $b \times 2a$ est égal à un autre multiplicateur $2ab$. La théorie générale (condition 2° du § 7) montre *a priori* que le calcul formel est impossible ou indéterminé : il est ici indéterminé, de sorte que les cas V, VI fournissent chacun une infinité de variétés invariantes dépendant d'un paramètre arbitraire α ; dans tous les autres cas, il y a une seule variété invariante et l'on a le Tableau suivant dans lequel chaque variété $\mathfrak{M}_2$ est définie par trois équations entre les cinq coordonnées [1] :

Variétés $\mathfrak{M}_2$.

(I)	(a, b),	$z = 0$,	$p = 0$,	$q = 0$,
(II)	$(a, 2a)$,	$y = \frac{q}{2a-b}$,	$p = 0$,	$z = \frac{q^2}{2(2a-b)}$,
(III)	$(b, 2b)$,	$x = \frac{p}{2b-a}$,	$q = 0$,	$z = \frac{p^2}{2(2b-a)}$,
(IV)	$(2a, 2b)$,	$x = \frac{p}{2b-a}$,	$y = \frac{q}{2a-b}$,	$z = \frac{p^2}{2(2b-a)} + \frac{q^2}{2(2a-b)}$,
(V)	$(a, 2b)$,	$y = 0$,	$z = 2\alpha x p + \frac{p^2(1-4\alpha)}{2(2b-a)}$,	$q = 0$,
(VI)	$(b, 2a)$,	$x = 0$,	$z = 2\alpha y q + \frac{q^2(1-4\alpha)}{2(2a-b)}$,	$p = 0$,
(VII)	$(2ab, a)$,	$y = 0$,	$p = 0$,	$q = 0$,
(VIII)	$(2ab, b)$,	$x = 0$,	$p = 0$,	$q = 0$,
(IX)	$(2ab, 2a)$,	$x = 0$,	$y = \frac{q}{2a-b}$,	$p = 0$,
(X)	$(2ab, 2b)$,	$y = 0$,	$x = \frac{p}{2b-a}$,	$q = 0$.

D'après la théorie générale, les variétés I, II, III, IV, dont les multiplicateurs ne sont ni C (c'est-à-dire ici $2ab$) ni des multiplicateurs associés, fournissent seules des multiplicités M_2 invariantes par T. Ces multiplicités sont les suivantes :

(I) Le plan xOy et tous les éléments de ce plan ;

(II) Le cylindre $z = \frac{y^2(2a-b)}{2}$ et tous les plans tangents à ce cylindre ;

(III) Un autre cylindre $z = \frac{x^2(2b-a)}{2}$ et ses plans tangents ;

---

(1) Le calcul que je supprime pour abréger se fait en écrivant les équations fonctionnelles qui définissent ces variétés et en leur appliquant la méthode des coefficients indéterminés.

(IV) Le paraboloïde $z = \frac{x^2(2b-a)}{2} + \frac{y^2(2a-b)}{2}$ et tous ses plans tangents.

Il y a donc quatre multiplicités invariantes contenant l'élément double

$$x = y = z = 0, \qquad p = q = 0,$$

formé de l'origine et du plan xOy.

Au contraire, les familles d'éléments (V), (VI), ..., (X) ne constituent pas des multiplicités. On n'a pas

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

pour ces familles d'éléments.