

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORETTI

Un théorème de la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 116-119

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__116_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__116_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES;

PAR M. L. ZORETTI.

On peut se proposer de rechercher dans quels cas l'ensemble limite d'un ensemble continu variable est lui-même continu. Soit E_n le continu variable (je suppose qu'il y en a une infinité dénombrable); un cas très simple est celui où chaque E_n contient tous les suivants. Il y a alors un ensemble commun à tous les E_n , et il est continu.

Quand les E_n n'ont pas de points communs, la question est plus délicate. J'en ai étudié un cas dans ma Thèse et suis arrivé au résultat suivant : *S'il existe un point a qui est limite pour tous les E_n , l'ensemble limite est continu.*

J'ai montré aussi que l'existence d'un point limite pour tous les E_n , c'est-à-dire tel que dans un cercle de centre a il y ait des points de tous les E_n à partir d'une certaine valeur de n , semblait essentielle pour permettre d'énoncer un théorème général. Ce sont des recherches sur la théorie des fonctions analytiques qui m'avaient conduit à cet énoncé. Des recherches analogues m'ont conduit depuis à me poser la question qui fait l'objet de cette Note.

Quand un ensemble continu E_n a pour limite un continu, il n'existe pas forcément de point qui soit limite pour *tous* les E_n , comme le montre l'exemple suivant :

Prenons pour ensemble E_n l'ensemble des points de coordonnées x, y définies par les égalités ou inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} y = \frac{1}{n}, & \frac{1}{3n} < x < \frac{2}{3n}, \\ y = \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{3n}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y = \frac{1}{n}, & \frac{p}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{p}{n} + \frac{2}{3n} \quad (p \leq n-1). \end{array}$$

En d'autres termes, sur chaque droite d'ordonnée $\frac{1}{n}$ nous divisons le segment 0-1 en n parties égales et nous prenons pour former un ensemble E_n le tiers moyen de chaque segment. Sur chaque droite nous aurons n ensembles E_n , tous continus. L'ensemble

limite est le segment 0-1 de l'axe des x , et il n'y a aucun point sur Ox qui soit limite de tous les E_n .

La question que je me pose sera la suivante : Caractériser les cas où l'on peut affirmer l'existence de points limites par tous les E_n , et notamment les cas où l'ensemble limite de tous les E_n est continu lui-même. La question est étroitement liée à la suivante : Peut-on prendre parmi les E_n un ensemble (dénombrable) d'ensembles (c'est-à-dire une infinité de valeurs de n) de telle façon que l'ensemble limite reste continu et que ses points soient limites pour *tous* les nouveaux E_n . L'exemple précédent montre que ce cas n'est pas le cas général. Dans cet exemple, on peut même choisir *des* E_n de façon que l'ensemble limite ne soit pas continu.

Je dis que le choix précédent est toujours possible dès qu'il existe *un* point a limite pour tous les E_n .

Je le démontre d'abord dans le cas particulier où l'ensemble limite E (qui est continu) est ce que j'appelle un continu *irréductible* entre deux points a et b , c'est-à-dire un ensemble tel qu'on ne puisse pas en extraire une *portion* continue contenant a et b . Prenons alors ceux des ensembles E_n qui ont b pour limite; il est facile de les déterminer (et même d'une infinité de façons). Leur ensemble limite sera un *continu* contenant a et b , c'est-à-dire sera E lui-même. De plus, tout point de E est limite pour tous les nouveaux E_n , car, si l'on pouvait trouver une infinité de valeurs de n indéfiniment croissantes telles que les E_n correspondants s'écartent du point c , ces E_n auraient un ensemble limite continu ne contenant pas c et contenant a et b . Il y aurait donc une *portion* de E continue contenant a et b , ce qui est contraire à l'hypothèse.

J'arrive au cas général où E est quelconque (continu) et je remarque d'abord que, quelle que soit la façon de choisir *des* valeurs de n croissant indéfiniment, les ensembles E_n ainsi extraits auront toujours un ensemble limite continu, puisque a sera toujours limite pour tous les E_n .

Supposons les E_n et E bornés; traçons un carré contenant E , et nous aurons dans la suite à diviser ce carré C en p^2 carrés égaux, C_p , par des parallèles aux côtés; j'appellerai ces carrés C_p ceux de la $p^{\text{ième}}$ subdivision. Donnons-nous également une suite de nombres positifs ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ (par exemple $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$).

Deux cas se présentent : ou bien tous les points de E sont limites de tous les E_n , alors le théorème est établi ; ou bien il y a au moins un point b_1 (intérieur à C_1) qui n'est pas limite pour tous les E_n . Traçons un cercle de centre b_1 et de rayon ϵ_1 ; considérons uniquement ceux des ensembles E_n qui ont des points dans ce cercle, et parmi ces ensembles (en nombre infini) choisissons-en une infinité dénombrable de façon que b_1 soit limite pour tous : la chose est évidemment possible. J'appelle les nouveaux ensembles les E'_n . Leur ensemble limite est continu (portion de E) et deux points a et b_1 sont limites pour tous les E'_n . Soit E_1 cet ensemble limite.

Ou bien tous les points de E_1 sont limites pour tous les E'_n , ou bien on peut trouver des points de E_1 qui ne sont pas limites de tous les E'_n . L'ensemble de ces derniers points pénètre à l'intérieur d'un certain nombre, fini, de carrés C_2 . Soient γ_2 ces carrés. Prenons, parmi les points de E_1 qui ne sont pas limites de tous les E'_n , un point b_2 intérieur à un des γ_2 . Traçons un cercle de rayon ϵ_2 et de centre b_2 . Considérons ceux des E'_n (il y en a une infinité) qui pénètrent dans ce cercle et choisissons-en parmi eux une infinité telle que b_2 soit limite pour tous. Soient E''_n leur ensemble, E_2 l'ensemble limite. Il est continu, contient a_1 , b_1 et b_2 , et ces trois points sont limites pour tous les E''_n . Alors ou bien tout point de E_2 est limite de tous les E''_n , ou bien il y a des points F_2 de E_2 qui ne sont pas limites de tous les E''_n . Si ces points ne sortent pas du carré γ_2 où nous avons pris b_2 , nous passerons à la troisième subdivision C_3 , nous prendrons les carrés γ_3 de cette subdivision qui contiennent les points non limites de tous les E''_n , nous choisirons un point b_3 dans un des γ_3 ; si au contraire des points de F_2 sont dans un autre carré γ_2 que celui qui contient b_2 , nous prendrons b_3 dans un de ces carrés γ_2 . Dans les deux cas, nous tracerons un cercle de centre b_3 de rayon ϵ_3 . Nous excluons les ensembles E''_n qui ne pénètrent pas dans ce cercle, et nous prenons parmi les ensembles conservés ceux qui tendent tous vers b_3 , soient E'''_n et ainsi de suite.

En général, nous ne passerons à la considération des carrés γ_p pris parmi les C_p de la $p^{\text{ième}}$ subdivision que lorsque parmi les points F_q (non limites de tous les E''_n) de E_q il n'y en aura plus dans un carré γ_{p-1} qui n'aurait pas déjà été utilisé.

Alors en continuant indéfiniment, ou bien la première hypothèse

se présentera pour un E_q (tous les points en seront limites de tous les E_n^q), ou bien c'est indéfiniment la seconde hypothèse qui se présentera. Dans le premier cas, le théorème est démontré.

Dans le second, prenons les ensembles E_n dans l'ordre où on les trouve $E_1, E_2, \dots$ jusqu'à ce que nous trouvions pour la première fois un ensemble E_n (que je puis appeler E'_1); prenons les ensembles $E'_1, E'_2, \dots$ jusqu'à trouver un E_n^2 , soit E_1^2 . Prenons $E_1^2, E_2^2, \dots$ jusqu'au premier E_n^3 , soit E_1^3 , et ainsi de suite. Je définis ainsi une infinité dénombrable d'ensembles G_m pris parmi les E_n . Leur ensemble limite est un continu G qui contient la partie commune à tous les E_q (cette partie commune comprend au moins a et b_1 , et par suite ne se réduit pas à un point). Je dis que tous les points de G sont limites de tous les G_m . En effet, un point de G , ou bien appartient à l'une des portions d'un des E_q qui est limite de tous les E_n^q , alors il sera limite de tous les F_m qui pour m assez grand sont pris parmi les E_q ; ou bien notre point μ de G_m n'est pas un tel point, alors à chaque subdivision en carrés C_p il appartient à un des γ_p . Il est donc limite de points b_p ; je veux dire qu'il y a une infinité de valeurs de p indéfiniment croissantes (mais non toutes) telles que notre point soit infiniment voisin des b_p correspondants. En tout cas, il est impossible de supposer une infinité de valeurs de m telles que F_m ne pénètre pas dans un cercle O de centre μ , car dans ce cercle, quel qu'il soit, entrent des points b_p pour lesquels ϵ_p est assez petit pour que le cercle de centre b_p et de rayon ϵ_p soit intérieur à O ; et comme, pour m assez grand, F_m pénètre dans ce cercle quel que soit m , il pénètre également dans O .

Dans tous les cas, nous aurons donc bien formé une suite F_m prise parmi les E_n dont l'ensemble limite sera continu et dont tous les points limites sont limites pour tous les F_m .

On comprend que cela puisse avoir un certain intérêt si l'on réfléchit que l'ensemble limite sera invariable si, au lieu de prendre tous les F_m , on en prend quelques-uns seulement (une infinité, bien entendu).