

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MALUSKI

Sur la continuité des racines d'une équation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 32-37

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__32_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__32_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE;

PAR M. ARTHUR MALUSKI.

Tout revient à démontrer le théorème suivant :

Soit l'équation algébrique

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = 0;$$

quel que soit le nombre positif A, on peut lui faire correspondre un nombre positif ε tel que, si les rapports

$$\frac{a_m}{a_{m-p}}, \quad \frac{a_{m-1}}{a_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{a_{m-p+1}}{a_{m-p}}$$

sont inférieurs à ε en valeur absolue, l'équation proposée admet p racines dont les valeurs absolues sont supérieures à A.

J'appelle ici *valeur absolue* du nombre $z = x + iy$ le nombre $+\sqrt{x^2 + y^2}$ et je poserai, pour abréger,

$$z' = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures au nombre positif α_1 , la valeur absolue de la somme des produits p à p de ces racines est moindre que $C_m^p \alpha_1^p$, en sorte qu'on a

$$\frac{a'_{m-p}}{a'_m} < C_m^p \alpha_1^p.$$

Par conséquent, dès l'instant où l'on a

$$\frac{a'_m}{a'_{m-p}} < \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

l'équation $f(x) = 0$ admet certainement une racine x_1 telle que $x'_1 > \alpha_1$.

Cette conclusion subsiste même si

$$\frac{a'_m}{a'_{m-p}} = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

à condition que $\pm \alpha_1$ ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

1. Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p}$$

et supposons que tous les rapports

$$\frac{\alpha'_m}{\alpha'_{m-p}}, \quad \frac{\alpha'_{m-1}}{\alpha'_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha'_{m-p+1}}{\alpha'_{m-p}}$$

soient inférieurs à ε_1 .

Divisons le polynome $f(x)$ par $1 - \frac{x}{x_1}$; désignons le quotient par $f_1(x)$; $f_1(x)$ est un polynome entier en x de degré $m-1$, que nous pouvons représenter par

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{m-1} x^{m-1}.$$

Un calcul facile donne

$$b_0 = a_0,$$

$$b_1 = a_1 + \frac{a_0}{x_1},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$b_{m-p} = a_{m-p} + \frac{a_{m-p-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^{m-p}},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$b_{m-1} = a_{m-1} + \frac{a_{m-2}}{x_1} + \dots + \frac{a_{m-p+1}}{x_1^{p-1}} + \frac{a_{m-p}}{x_1^p} + \dots + \frac{a_0}{x_1^{m-1}}.$$

En tenant compte de l'expression de b_{m-p} , on voit immédiatement qu'on peut écrire

$$b_{m-p+1} = a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1} b_{m-p},$$

$$b_{m-p+2} = a_{m-p+2} + \frac{1}{x_1} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^2} b_{m-p},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$b_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{x_1} a_{m-2} + \dots + \frac{1}{x_1^{p-2}} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^{p-1}} b_{m-p}.$$

Considérons le rapport $\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}$ et cherchons-en une limite supé-

Tous les nombres qui constituent les seconds membres des inégalités précédentes sont inférieurs au dernier d'entre eux qui, lui-même, est manifestement inférieur à $\frac{2}{\alpha_1}$, car, si l'on remplace ε_1 par sa valeur et si l'on remarque que le nombre $\alpha_1 - N - 1$ est au moins égal à 1 en vertu des hypothèses, on a sûrement

$$\frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} < \frac{1}{\alpha_1},$$

pourvu que $p > 1$. Or, ce calcul est sans objet lorsque $p = 1$.

2. Déterminons maintenant le nombre positif α_2 par la condition

$$\frac{2}{\alpha_1} = \frac{1}{C_{m-1}^{p-1} \alpha_2^{p-1}}$$

et posons

$$\frac{2}{\alpha_1} = \varepsilon_2.$$

On voit, comme précédemment, que tous les rapports

$$\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}, \quad \frac{b'_{m-2}}{b'_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{b'_{m-p+1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à ε_2 .

Par conséquent, l'équation $f_1(x) = 0$ admet au moins une racine x_2 telle que

$$x'_2 > \alpha_2.$$

D'un autre côté, on établit par un calcul analogue au précédent que les rapports

$$\frac{b'_0}{b'_{m-p}}, \quad \frac{b'_1}{b'_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{b'_{m-p-1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à $\frac{N \alpha'_1}{\alpha'_1 - N - 1}$ et, par suite, à $2N$, pourvu qu'on suppose

$$\alpha_1 > 2(N+1),$$

inégalité non contradictoire avec la précédente limite de α_1 .

Divisons à présent le polynôme $f_1(x)$ par $1 - \frac{x}{x_2}$ et désignons le quotient par $f_2(x)$; on voit, en raisonnant comme précédem-

ment, que, si α_3 désigne un nombre positif tel que

$$\frac{2}{\alpha_2} = \frac{1}{C_{m-2}^{p-2} \alpha_3^{p-2}},$$

et si l'on pose

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\alpha_2},$$

les valeurs absolues des rapports des $p - 2$ coefficients des plus hautes puissances de x du polynome $f_2(x)$ à celui de x^{m-p} sont inférieures à ε_3 . Par conséquent, une racine au moins de $f_2(x) = 0$, soit x_3 , satisfait à la condition

$$x_3' > \alpha_3.$$

Si, en outre, on a pu prendre

$$\alpha_2 > 2(2N + 1)$$

ou même, ce qui est plus simple,

$$\alpha_2 > 4(N + 1),$$

les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_2(x)$ au suivant sont inférieures à $4N$.

3. Continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions au polynome $f_p(x)$.

Nous avons eu à écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{p-1} &= 2 C_{m-p+1}^1 \alpha_p, \\ \alpha_{p-2} &= 2 C_{m-p+2}^2 (\alpha_{p-1})_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_1 &= 2 C_{m-1}^{p-1} (\alpha_2)^{p-1}. \end{aligned}$$

En même temps, nous avons supposé qu'on pouvait prendre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> 2(N + 1), \\ \alpha_2 &> 2^2(N + 1), \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_p &> 2^p(N + 1). \end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes, toutes ces inégalités sont satis-

faites si l'on prend seulement

$$\alpha_p > 2^p(N+1).$$

On prendra ensuite

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p}.$$

Alors, si α_p vérifiant la condition précédente, on a de plus

$$\alpha_p > A,$$

A étant un nombre positif donné à l'avance aussi grand qu'on veut, on voit que les p nombres $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ sont tous supérieurs à A.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc p racines $x_1, x_2, \dots, x_p$ dont les valeurs absolues sont supérieures à A.

Enfin, les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_p(x)$ au dernier sont inférieures à $2^p \times N$, en sorte que, d'après un théorème connu, toutes les racines de l'équation $f_p(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures à $2^p \times N + 1$.

Le théorème est complètement démontré.
