

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Sur l'intégration approchée des équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 225-246

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__225_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les équations différentielles qui se présentent en Mécanique ou en Physique ne sont pas, en général, exactement intégrables; on doit donc, le plus souvent, substituer aux solutions exactes des solutions approchées.

C'est un problème très important (et néanmoins peu étudié) que celui de l'estimation des erreurs que comportent ces solutions approchées, c'est-à-dire la recherche des limites supérieures pour les valeurs absolues de ces erreurs, ces limites étant des fonctions positives de la variable indépendante. Il permet, en effet, de constater si les écarts entre les nombres prévus par le calcul et ceux donnés par les observations sont dus à l'approximation des procédés mathématiques ou à celle des lois physiques adoptées.

A un autre point de vue, l'estimation des erreurs sert de guide dans l'application de certains procédés d'intégration approchée en donnant un sens précis à la proposition intuitive : « Il suffit que deux systèmes différentiels soient assez voisins pour que leurs solutions soient aussi voisines qu'on le veut. »

J'ai cherché tout d'abord (1) à résoudre ce problème en utilisant la méthode d'approximations successives de M. Picard pour déduire les solutions exactes des solutions approchées. Malheureusement, même avec les perfectionnements que j'ai apportés à l'évaluation des restes des séries données par cette méthode, on n'opère jamais que sur des nombres positifs (tels que les coefficients de Lipschitz qui peuvent correspondre à des dérivées négatives) et l'on ne tient pas compte des compensations qui peuvent se produire entre les diverses causes d'erreur. La pratique montre que les résultats obtenus, très commodes pour les recherches théoriques, le sont bien moins pour les applications numériques.

Une méthode nouvelle, qui fait l'objet principal de ce Mé-

(1) *Comptes rendus*, 20 février et 17 juillet 1905; *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 107.

noire ⁽¹⁾, donne de bien meilleurs résultats; elle repose sur un principe tout différent.

Avant d'en aborder l'étude, et après quelques généralités (nos 1, 2), je montre (nos 3, 4) qu'on peut estimer l'ordre de grandeur des solutions d'un système Σ' d'équations différentielles linéaires en utilisant les solutions d'un autre système Σ de même forme dont les coefficients positifs dominant ⁽²⁾ les coefficients correspondants de Σ' . Après avoir précisé l'énoncé du problème principal (nos 4, 5), je montre que les erreurs que comportent les solutions approchées d'un système d'équations différentielles quelconques peuvent être envisagées comme solutions d'un système linéaire déterminé Σ' assez analogue aux équations aux variations de M. Poincaré (n° 6). Bien que ce système ne soit pas entièrement connu, on peut lui appliquer la proposition précédente et retrouver ainsi (nos 7, 8) des résultats très voisins de ceux que j'avais donnés antérieurement.

Dans les méthodes nouvelles, on envisage encore les erreurs comme solutions d'un système linéaire avec seconds membres σ dont la formation (n° 10) comporte un certain degré d'arbitraire. Les seconds membres dépendent encore des solutions exactes cherchées, mais doivent être, ainsi que leurs dérivées premières, petits en valeur absolue; les coefficients des premiers membres ne contiennent que des éléments connus.

Si les seconds membres des équations σ étaient connus, un procédé donné par Cauchy, et rappelé au n° 9, pour l'intégration des équations linéaires non homogènes donnerait les erreurs sous formes d'intégrales définies. Ne pouvant calculer exactement ces intégrales, on peut d'abord déterminer une limite supérieure de leurs valeurs absolues, et obtenir ainsi (n° 11) une solution du problème posé. On peut aussi calculer approximativement les seconds membres de σ et les intégrales définies en estimant les erreurs que comportent ces approximations (n° 12). Cette seconde méthode revient à déduire des solutions approchées données d'autres solutions paraissant plus approchées. On est amené ainsi naturellement à un procédé d'approximations succes-

⁽¹⁾ Elle a été résumée dans une Note aux *Comptes rendus* (10 février 1908).

⁽²⁾ Pour le sens de ce mot, voir n° 2.

sives (nos 13, 14) comprenant comme cas particuliers celui de M. Picard, et où les quadratures de cette dernière méthode sont remplacées par l'intégration de systèmes linéaires à seconds membres. Ce procédé qui avait été utilisé, mais non, que je sache, justifié, donne à son tour un résultat utile concernant l'estimation des erreurs.

Les résultats précédents ne font intervenir que des hypothèses assez larges ⁽¹⁾ concernant les systèmes différentiels auxquels on les applique. Par cela même, ils semblent utiles en Physique ⁽²⁾.

J'ai essayé de les appliquer à un exemple ne présentant rien d'artificiel, qui fera l'objet d'un article des *Annales de l'Université de Grenoble*. Il m'a été fourni par la théorie du pendule de Foucault. Les équations du mouvement ne semblent pas susceptibles d'une intégration exacte; dans la théorie élémentaire, on les réduit à leur partie linéaire. En étudiant cette approximation par nos diverses méthodes, on obtient toujours une région où le pendule doit se trouver au bout d'une oscillation. Mais, alors que les premières donnent pour cette région des dimensions de beaucoup supérieures à la déviation qu'on doit observer, la dernière, avec les données numériques de l'expérience du Panthéon, donne pour la dimension correspondant à la déviation une fraction de la déviation inférieure à 0,2. Cette fraction pourrait être bien réduite en apportant plus de soin dans l'application de la méthode; mais il m'a semblé que l'exemple précédent, tel qu'il est, suffisait à montrer l'intérêt de cette méthode.

1. Nous regarderons, dans la suite, comme résolu le problème de l'intégration approchée d'un système Σ d'équations différen-

⁽¹⁾ Cependant, au cours de ce travail, j'ai fait sur les systèmes différentiels étudiés des hypothèses plus restrictives qu'il n'eût été nécessaire pour l'exactitude des résultats. Cela m'a permis de donner des démonstrations assez brèves.

⁽²⁾ Il semble, en effet, que des théorèmes supposant des équations analytiques ne soient pas très bien adaptés à des lois physiques parfois assez grossièrement approchées. D'autre part, sans tenir compte des discordances que peuvent présenter avec la réalité des énoncés précis de lois physiques, ces énoncés peuvent conduire à l'emploi successif de plusieurs équations analytiques distinctes pour un même problème. Tel est le cas du mouvement sur une courbe avec résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

tielles linéaires; nous donnerons donc d'abord quelques indications rapides sur ce sujet.

Dans le cas particulier très important où Σ est à coefficients constants, l'intégration exacte est possible et se ramène à des opérations algébriques. La théorie des fonctions permet également d'intégrer certaines classes d'équations différentielles linéaires. D'autre part, si le système linéaire Σ est constitué par les équations aux variations correspondant à un système différentiel dont on connaît la solution générale, ce système s'intègre immédiatement.

Ces résultats bien connus sont intéressants au point de vue de l'usage que nous ferons des équations linéaires, à cause de l'arbitraire subsistant dans le choix des systèmes Σ que nous utiliserons. Nous pourrions, en effet, substituer à un système Σ un système voisin Σ' de même forme quelle que soit la nature, au point de vue de la théorie des fonctions, des coefficients de Σ et de Σ' , pourvu que les différences entre les coefficients correspondants restent petites en valeur absolue et qu'il en soit de même des dérivées premières de ces coefficients. Pour intégrer approximativement Σ , on cherchera donc un système voisin Σ' qui soit intégrable. Nous n'insisterons pas sur les problèmes d'interpolation auxquels conduirait l'application de cette méthode.

2. On peut aussi employer la méthode d'approximations successives de M. Picard à l'intégration approchée d'un système linéaire Σ . Les approximations successives convergent dans tout l'intervalle de régularité des coefficients de Σ . Il sera souvent commode, dans l'application de cette méthode, de prendre comme premières approximations non des constantes, mais des fonctions convenablement choisies de la variable indépendante. Il serait naturel par exemple de prendre comme premières approximations les intégrales d'un système Σ' , linéaire comme Σ , mais ayant comme coefficients des constantes égales aux valeurs moyennes des coefficients de Σ dans l'intervalle où l'on considère la variable indépendante.

Nous montrerons maintenant comment les approximations successives conduisent à une proposition intéressante concernant la comparaison des solutions de certains systèmes linéaires.

Nous abrègerons beaucoup le langage à l'aide de la locution sui-

vante : Nous dirons qu'une fonction $F(t)$ supérieure ou égale à la valeur absolue d'une autre fonction $f(t)$ dans un certain intervalle domine cette fonction $f(t)$ ou en est une DOMINANTE dans l'intervalle considéré. Une fonction ne peut être négative dans l'intervalle où elle en domine une autre.

3. Soient

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i,$$

$$(2) \quad \frac{dx'_i}{dt} = a'_{i1}x'_1 + \dots + a'_{in}x'_n + b'_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

deux systèmes d'équations linéaires. Nous supposons que dans l'intervalle I

$$t_0 \leq t \leq T,$$

les a et les b dominent les a' et les b' de mêmes indices, ces diverses fonctions étant continues.

Comparons les solutions de (1) et (2) définies par les données initiales

$$(3) \quad \begin{cases} t = t_0, \\ x_1 = x_{10}, & \dots, & x_n = x_{n0}, \\ x'_1 = x'_{10}, & \dots, & x'_n = x'_{n0} \end{cases}$$

satisfaisant aux inégalités

$$(4) \quad x_{10} \geq |x'_{10}|, \quad \dots, \quad x_{n0} \geq |x'_{n0}|.$$

A cet effet, prenons comme premières approximations, dans l'intégration de (1) et (2) par la méthode de M. Picard, les données initiales correspondantes. Les approximations suivantes y'_i , y'^1_i ont pour dérivées

$$(5) \quad \frac{dy'_i}{dt} = a_{i1}x_{10} + \dots + a_{in}x_{n0} + b_i,$$

$$(6) \quad \frac{dy'^1_i}{dt} = a'_{i1}x'_{10} + \dots + a'_{in}x'_{n0} + b'_i,$$

et pour valeurs initiales

$$t = t_0, \quad y'_i = x_{i0}, \quad y'^1_i = x'_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On voit immédiatement que les fonctions

$$y_1^1 + y_1'^1, \quad y_1^1 - y_1'^1$$

ont leurs dérivées positives ou nulles dans I. Leurs valeurs initiales sont aussi positives ou nulles; ces fonctions sont donc positives ou nulles dans I. Donc les y^1 dominant les y'^1 correspondants :

$$y_1^1 \geq |y_1'^1|, \quad \dots, \quad y_n^1 \geq |y_n'^1|.$$

Ces inégalités sont analogues aux inégalités (4).

On peut reprendre sur les troisièmes approximations $y_i^2, y_i'^2$ le raisonnement précédent; on retrouve le même résultat qu'on étend ensuite à toutes les approximations successives et, par suite, à leurs limites, c'est-à-dire aux intégrales x_i, x_i' des équations (1) et (2) : les x dominant, dans I, les x' correspondants.

Un système linéaire d'ordre quelconque peut toujours être ramené au premier ordre par l'introduction d'inconnues auxiliaires; nous pouvons donc énoncer de la façon suivante le résultat qui vient d'être établi :

Soient Σ, Σ' deux systèmes d'équations différentielles linéaires construits de la même façon avec des fonctions inconnues correspondantes, résolus par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des fonctions inconnues. On suppose que, dans un intervalle I ($t_0 \leq t \leq T$) de variation de la variable indépendante commune t , les coefficients de Σ dominant les coefficients correspondants de Σ' , que les données initiales correspondent à la borne inférieure de l'intervalle et que les données initiales de Σ dominant les données correspondantes de Σ' .

Dans ces conditions, les solutions de Σ déterminées par ces données initiales dominant dans l'intervalle I les solutions correspondantes de Σ' . Le même résultat s'étend aux dérivées dont l'ordre ne surpasse pas l'ordre des équations par rapport aux fonctions inconnues correspondantes.

4. Ce théorème peut être généralisé. En effet, l'hypothèse que Σ et Σ' sont linéaires sert uniquement à justifier (par la méthode de M. Picard) l'existence des solutions de (1) et (2) dans l'intervalle I. En modifiant la définition de cet intervalle, on pourrait

énoncer un théorème analogue pour le cas où les seconds membres des équations de Σ et Σ' seraient des polynômes de degré quelconque ou des séries entières par rapport aux variables x et x' . Nous laisserons de côté, malgré leur intérêt, cette généralisation et d'autres plus étendues encore, pour aborder l'objet principal de cette étude, que nous allons maintenant indiquer.

5. Soit un système S d'équations différentielles résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On peut toujours donner cette forme à un système d'ordre supérieur au premier par l'emploi d'inconnues auxiliaires. Toutefois, lorsque nous aurons de tels systèmes, nous pourrons, sans inconvénient, nous dispenser d'écrire celles de leurs équations servant à définir les inconnues auxiliaires.

Nous admettrons que, quand le point (t, X_1, \dots, X_n) appartient à un domaine borné D à $n + 1$ dimensions, les fonctions $f_i(t; X_1, \dots, X_n)$ sont continues par rapport à leurs divers arguments et admettent, par rapport à X_1, \dots, X_n , des dérivées premières continues dans D. De cette hypothèse il résulte que, le point t, X_1, \dots, X_n se déplaçant dans D et t restant fixe, toute dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ a une borne supérieure et une borne inférieure finies.

Par suite, on peut admettre qu'à chaque dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ correspond une fonction (positive ou nulle) de t que nous désignerons par a_{ik} , telle qu'on ait l'inégalité

$$a_{ik} \geq \left| \frac{\partial f_i(t; X_1, \dots, X_n)}{\partial X_k} \right|$$

pour tous les points t, X_1, \dots, X_n de D.

Si le segment de droite joignant deux points t, X_1, \dots, X_n et t, X'_1, \dots, X'_n est tout entier intérieur à D, on a l'inégalité suivante, analogue à celle de Lipschitz :

$$|f_i(t; X_1, \dots, X_n) - f_i(t; X'_1, \dots, X'_n)| \leq a_{i1} |X_1 - X'_1| + \dots + a_{in} |X_n - X'_n|.$$

Pour cette raison, nous dirons que la fonction a_{ik} de la variable t associée à la dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial X_k}$ est le coefficient de Lipschitz correspondant à f_i et à X_k .

On peut choisir d'une infinité de façons ces coefficients de Lipschitz; on peut, en particulier, prendre les constantes A_{ik} telles que

$$A_{ik} \geq a_{ik}.$$

Soit $t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$ un point intérieur à D. Le système (S) admet pour $t > t_0$ et assez voisin de t_0 des solutions exactes $x_1(t), \dots, x_n(t)$ prenant respectivement pour $t = t_0$ les valeurs initiales x_{10}, \dots, x_{n0} . La courbe intégrale exacte est l'ensemble des points $t, x_1(t), \dots, x_n(t)$; elle atteint nécessairement ⁽¹⁾ la frontière de D. Nous appellerons θ un nombre tel que, dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq \theta$, la courbe intégrale exacte reste intérieure à D.

Des fonctions $y_1(t), \dots, y_n(t)$ peu différentes de $x_1(t), \dots, x_n(t)$ dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq \theta$ seront dites dans cet intervalle solutions approchées de S. Observons qu'avec cette définition, n fonctions continues quelconques satisfaisant à peu près pour $t = t_0$ aux données initiales proposées peuvent, dans un intervalle assez petit de borne inférieure t_0 , être regardées comme solutions approchées. Mais, en général, les solutions approchées sont les solutions exactes d'un système différentiel facile à intégrer et différant peu de S.

Le plus souvent, nous ne nous préoccuperons pas de l'origine des solutions approchées, et, les supposant connues, nous chercherons à estimer les erreurs correspondantes. Nous allons préciser l'énoncé de ce problème.

Les erreurs des solutions approchées $y(t)$ par rapport aux solutions exactes $x(t)$ sont les différences

$$\delta_1(t) = x_1(t) - y_1(t), \quad \dots, \quad \delta_n(t) = x_n(t) - y_n(t).$$

La détermination exacte des erreurs revient à l'intégration exacte de S; elle est donc en général pratiquement impossible. On se contentera donc d'estimer les erreurs, c'est-à-dire de déter-

⁽¹⁾ Painlevé.

miner des fonctions $\Delta_1(t), \dots, \Delta_n(t)$ aussi petites que possible, dominant respectivement les erreurs $\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)$.

Cette détermination sera variable pour un certain intervalle $I(t_0 \leq t \leq T)$, dont la borne inférieure t_0 est la valeur initiale t_0 de la variable indépendante. Cet intervalle sera précisé dans les propositions que nous énoncerons plus loin.

En langage géométrique, on peut dire que nous cherchons une gaine entourant la courbe intégrale approchée, où la courbe intégrale exacte reste comprise lorsque t varie dans l'intervalle I . Nous appellerons ici *gaine* le domaine défini par les inégalités

$$t_0 \leq t \leq T, \\ y_1(t) - \Delta_1(t) \leq X_1 \leq y_1(t) + \Delta_1(t), \quad \dots, \quad y_n(t) - \Delta_n(t) \leq X_n \leq y_n(t) + \Delta_n(t).$$

6. La proposition du n° 3 permet d'établir rapidement des résultats analogues à ceux que nous avons donnés antérieurement ⁽¹⁾ pour l'évaluation des erreurs.

Conservons les notations du numéro précédent, écrivons les identités ⁽²⁾

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t; y_1, \dots, y_n) + \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et retranchons-les membre à membre des identités exprimant que x_1, \dots, x_n sont solutions de S .

Nous pouvons écrire, en introduisant les erreurs δ ,

$$f_i(t; x_1, \dots, x_n) - f_i(t; y_1, \dots, y_n) = a'_{i1} \delta_1 + \dots + a'_{in} \delta_n;$$

les a'_{ik} désignent des fonctions de t dont il serait aisé de démontrer la continuité ⁽³⁾. Nous supposons toutefois que tous les points t, X_1, \dots, X_n tels que

$$|X_1 - y_1| \leq |\delta_1|, \quad \dots, \quad |X_n - y_n| \leq |\delta_n|$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 20 février et 17 juillet 1905; *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 107.

⁽²⁾ Nous écrirons souvent x et y au lieu de $x(t)$ et $y(t)$, et de même pour les autres fonctions de t .

⁽³⁾ *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 125.

sont intérieurs au domaine D du n° 5, c'est ce que nous appellerons l'hypothèse H.

Posons maintenant

$$b'_i = \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

les b'_i sont aussi fonctions continues de t ; on peut dire que ce sont les *erreurs sur les équations*.

Nous pouvons donc considérer les erreurs *comme les solutions d'un système linéaire* (1)

$$(\Sigma') \quad \frac{d\delta_i}{dt} = a'_{i1}\delta_1 + \dots + a'_{in}\delta_n + b'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ces solutions sont déterminés par la condition que pour $t = t_0$ elles prennent des valeurs numériques égales aux erreurs initiales, c'est-à-dire aux différences

$$\delta_1(t_0) = y_1(t_0) - x_1(t_0), \quad \dots, \quad \delta_n(t_0) = y_n(t_0) - x_n(t_0).$$

7. Appliquons à Σ' le théorème du n° 3. Les coefficients de Lipschitz a ont été définis au n° 5 comme fonctions de t ; ce sont manifestement des fonctions dominantes des fonctions a' correspondantes tant que H est vérifiée.

Désignons par b_1, \dots, b_n des fonctions dominant b'_1, \dots, b'_n dans un intervalle $I_1 (t_0 \leq t \leq T_1)$ où la courbe intégrale approchée existe et reste intérieure à D :

$$b_i \geq \left| \frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \dots, y_n) \right| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Considérons alors Σ' comme l'analogue du système (2) du n° 3 et adjoignons-lui le système

$$(\Sigma) \quad \frac{d\Delta_i}{dt} = a_{i1}\Delta_1 + \dots + a_{in}\Delta_n + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui sera l'analogue du système (1).

(1) On ne manquera pas d'observer l'analogie de ce système (Σ') avec le système des équations aux variations du système S et de ses solutions x_1, \dots, x_n ; toutefois les équations de (Σ') ne sont pas homogènes.

Le théorème donné à cet endroit nous montre qu'un système de solutions $\Delta_1(t), \dots, \Delta_n(t)$ de Σ étant déterminé par des données initiales $\Delta_1(t_0), \dots, \Delta_n(t_0)$ dominant les erreurs initiales $\delta_1(t_0), \dots, \delta_n(t_0)$, les fonctions $\Delta(t)$ domineront les erreurs correspondantes $\delta(t)$ dans un intervalle I_2 ($t_0 \leq t \leq T_2$) tel que : 1° les solutions exactes existent dans cet intervalle; 2° I_2 est intérieur à I_1 ; 3° H est vérifiée.

Ces trois conditions sont satisfaites pour l'intervalle I ($t_0 \leq t \leq T \leq T_1$) défini par la condition que dans cet intervalle les points t, X_1, \dots, X_n de la gaine

$$(G) \quad t_0 \leq t \leq T, \quad |X_1 - y_1| \leq \Delta_1, \quad \dots, \quad |X_n - y_n| \leq \Delta_n$$

sont intérieurs à D .

En effet, 2° est vérifiée dans I par définition même, et la condition 3° est vérifiée manifestement dans le plus grand intervalle I'

$$t_0 \leq t \leq T' \leq T,$$

où 1° est vérifiée et où la courbe intégrale exacte reste intérieure à la gaine G . Il est absurde de supposer $T' < T$, car, s'il en était ainsi, la courbe intégrale exacte qui ne peut avoir un point d'arrêt dans D sortirait de G par un point $T' X, X_1, \dots, X_n$ tel que l'une des différences $X - y$ serait égale en valeur absolue à la valeur (pour $t = T'$) de la fonction Δ de même indice, et cela est incompatible avec le fait que les Δ dominant les δ (1).

8. Nous résumerons de la façon suivante le résultat obtenu :

Soit S un système d'équations différentielles satisfaisant dans un domaine borné D aux conditions du n° 3. A tout point intérieur à ce domaine correspond une courbe intégrale exacte C_x . Pour étudier cette courbe, on part d'une courbe intégrale approchée C_y supposée connue, et l'on construit une gaine G entourant C_y , intérieure à D , et comprenant C_x à son intérieur. Les dimensions de cette gaine sont des fonctions de t , dominant les erreurs, qu'on détermine par l'intégration

(1) Nous laissons de côté le cas évidemment exceptionnel où les inégalités exprimant que les Δ dominant les δ se transformeraient en égalités.

d'un système linéaire Σ , correspondant équation par équation à S , construit avec les coefficients de Lipschitz a , et les fonctions b dominant les erreurs b' sur les équations $(^1)$.

Quand on applique la proposition précédente à la détermination des erreurs que comportent certaines approximations classiques, les résultats numériques sont suivant les cas satisfaisants ou invraisemblables. On voit bien vite la cause de cette irrégularité dans le succès de la méthode : Alors que les coefficients figurant dans les équations de Σ' peuvent avoir des signes quelconques, ceux de Σ sont tous positifs $(^2)$. Les fonctions Δ peuvent être bien supérieures aux fonctions δ correspondantes; de plus, ces fonctions Δ croissent en général très rapidement avec t . Il y a donc lieu de *chercher une méthode tenant compte, autant que possible, non seulement de la grandeur, mais aussi des signes des coefficients de Σ' .*

C'est ce que nous ferons, après avoir rappelé un procédé dû à Cauchy pour déduire les solutions d'un système linéaire non homogène de celles du système homogène correspondant.

9. Pour intégrer le système linéaire non homogène

$$(\tau) \quad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \dots - A_{in}\delta_n = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$(^1)$ Ce résultat est très voisin de celui que nous avons donné antérieurement (Mémoire des *Acta*, cité plus haut, n° 1 à 6). Il en diffère cependant par le mode de démonstration, qui est ici plus simple, et par les résultats. Les hypothèses sur les fonctions f faites au n° 5 sont plus restreintes que celles faites dans le travail précédent; cela a peu d'importance pratique. La définition du domaine D est ici plus large (nous avions supposé antérieurement que D était une gaine); cela peut présenter quelque intérêt dans des questions de Mécanique, lorsque la variable indépendante (le temps t) ne figure pas explicitement dans les équations. On peut alors avantageusement définir D par l'intégrale des forces vives et un intervalle arbitraire de variation du temps.

On aurait des résultats plus complets en revenant à notre premier mode de démonstration; mais celui qui est adopté ici est mieux en harmonie avec la suite du travail, où le système Σ' joue un rôle essentiel.

$(^2)$ Par exemple, pour estimer l'influence exercée par une force perturbatrice sur un mobile soumis à l'action d'un centre fixe supposée proportionnelle à la distance, on serait donc conduit, toutes choses égales d'ailleurs, aux mêmes équations Σ , que l'action soit attractive ou répulsive.

(où les A et B désignent des fonctions connues de t), on détermine les systèmes de solutions du système homogène correspondant :

$$(7) \quad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \dots - A_{in}\delta_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tels que pour $t = \alpha$ une seule des fonctions inconnues est égale à l'unité, les autres étant nulles. Soient

$$(8) \quad \delta_1 = \varphi_{1,i}(t, \alpha), \quad \delta_2 = \varphi_{2,i}(t, \alpha), \quad \dots, \quad \delta_n = \varphi_{n,i}(t, \alpha)$$

les solutions de (7) telles que $\varphi_{ii}(\alpha, \alpha) = 1$, $\varphi_{ki}(\alpha, \alpha) = 0$ pour $k \neq i$.

Les formules

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = \int_{t_0}^t [B_1(\alpha) \varphi_{k,1}(t, \alpha) + B_2(\alpha) \varphi_{k,2}(t, \alpha) + \dots + B_n(\alpha) \varphi_{k,n}(t, \alpha)] d\alpha \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

déterminent alors les solutions des équations (σ) s'annulant pour $t = t_0$ ⁽¹⁾.

La solution générale s'en déduit aisément.

La méthode s'applique aux systèmes linéaires d'ordre supérieur, mais il n'est pas nécessaire d'écrire les inconnues auxiliaires permettant de ramener le système au premier ordre.

Par exemple, pour intégrer le système non homogène

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} - b \frac{dy}{dt} - c x - d y = f(t), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - a_1 \frac{dx}{dt} - b_1 \frac{dy}{dt} - c_1 x - d_1 y = f_1(t), \end{array} \right.$$

on détermine les solutions du système linéaire sans seconds membres correspondant, savoir :

$$x = \psi(t, \alpha), \quad y = \varpi(t, \alpha),$$

telles que, pour $t = \alpha$,

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad x = 0, \quad y = 0,$$

(¹) Si quelques-unes des équations (σ) sont homogènes, il est inutile de calculer les fonctions φ correspondantes; si $B_i = 0$, $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ni}$ sont inutiles.

et

$$x = \psi_1(t, \alpha), \quad y = \varpi_1(t, \alpha),$$

telles que, pour $t = \alpha$,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

On aura pour déterminer les solutions de (10), s'annulant ainsi que leurs dérivées premières pour $t = t_0$,

$$(11) \quad \begin{cases} x = \int_{t_0}^t [f(\alpha) \psi(t, \alpha) + f_1(\alpha) \psi_1(t, \alpha)] d\alpha; \\ y = \int_{t_0}^t [f(\alpha) \varpi(t, \alpha) + f_1(\alpha) \varpi_1(t, \alpha)] d\alpha; \end{cases}$$

leurs dérivées sont données par

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^t [f(\alpha) \psi'(t, \alpha) + f_1(\alpha) \psi_1'(t, \alpha)] d\alpha, \\ \frac{dy}{dt} = \int_{t_0}^t [f(\alpha) \varpi'(t, \alpha) + f_1(\alpha) \varpi_1'(t, \alpha)] d\alpha, \end{cases}$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à t .

10. Reprenons les notations et les conventions du n° 5.

Pour appliquer les résultats qui précèdent à l'estimation des erreurs, nous commencerons par écrire le système (S) sous la forme

$$(S') \quad \frac{dx_i}{dt} - A_{i1}x_1 - \dots - A_{in}x_n = h_i(t; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les A désignent des fonctions de t , et où les dérivées premières des fonctions h par rapport aux variables x sont supposées petites au voisinage du système considéré de solutions approchées $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Nous dirons alors qu'on a donné au système proposé une forme *pseudo-linéaire*.

Le système (S) se présente naturellement sous une telle forme lorsque les solutions approchées sont obtenues, comme il arrive souvent en Mécanique (petits mouvements, oscillations autour

d'un mouvement stable), en limitant les équations de (S) à leur partie linéaire.

Dans les autres cas, on peut donner à (S) la forme pseudo-linéaire S' en procédant de la façon suivante : chaque coefficient A_{ij} est soit égal au résultat de la substitution des solutions approchées $y_1(t), \dots, y_n(t)$ à x_1, \dots, x_n dans la dérivée $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, soit peu différent de ce résultat; l'arbitraire qui subsiste ainsi dans le choix de ces coefficients peut rendre plus aisée l'application de la méthode suivante. Les A étant déterminés, on a

$$h_i(t; x_1, \dots, x_n) = f_i(t; x_1, \dots, x_n) - A_{i1}x_1 - \dots - A_{in}x_n.$$

Les dérivées partielles des f étant supposées continues, il résulte de la façon même dont on choisit les A que les dérivées partielles des h restent bien, comme on le cherchait, petites au voisinage du système des solutions approchées.

Définissons maintenant des fonctions $g(t)$ par les égalités

$$(13) \quad \frac{dy_i}{dt} - A_{i1}y_1 - \dots - A_{in}y_n = g_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Retranchons ces égalités des équations correspondantes de S' , les erreurs $\delta_i = x_i - y_i$ satisfont au système

$$(\sigma) \quad \frac{d\delta_i}{dt} - A_{i1}\delta_1 - \dots - A_{in}\delta_n = B_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les expressions $B_i(t)$ désignant les différences

$$h_i(t; x_1, \dots, x_n) - g_i(t)$$

où l'on doit considérer les x comme remplacés par les solutions cherchées de (S') .

Les B n'étant pas entièrement connues, les intégrales (9) ne peuvent être utilisées pour le calcul exact des erreurs, mais peuvent l'être pour l'estimation de ces erreurs, ainsi que nous allons le voir.

11. Une première méthode consiste à remplacer chaque terme de la somme à intégrer par une fonction qui le domine.

On détermine, pour cela, des fonctions $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ supé-

rieures ou égales aux valeurs absolues des différences

$$h_1(t; X_1, \dots, X_n) - g_1(t), \quad \dots, \quad h_n(t; X_1, \dots, X_n) - g_n(t)$$

lorsque le point (t_1, X_1, \dots, X_n) reste voisin de la courbe intégrale approchée C_γ . Soit $t_0 < t < T$ un intervalle où l'on veut estimer les erreurs et tel que C_γ soit intérieure à D ; on déterminera des fonctions $\Phi_{ki}(t, \alpha)$ respectivement supérieures aux valeurs absolues des fonctions $\gamma_{ki}(t, \alpha)$ des mêmes indices lorsque t et α varient dans cet intervalle.

Nous supposons désormais que les solutions approchées satisfont exactement aux données initiales ⁽¹⁾ (lesquelles correspondent à $t = t_0$).

Les fonctions

$$(14) \quad \Delta_k^1(t) = \int_{t_0}^t [\beta_1(\alpha) \Phi_{k1}(t, \alpha) + \dots + \beta_n(\alpha) \Phi_{kn}(t, \alpha)] d\alpha$$

dominent les erreurs $\delta_k(t)$.

D'une façon plus précise, dans tout intervalle

$$I: t_0 \leq t \leq T$$

tel que $T \leq T_1$, que la gaine

$$G_1: t_0 \leq t \leq T, \quad |X_1 - y_1| < \Delta_1^1, \quad \dots, \quad |X_n - y_n| < \Delta_n^1$$

soit intérieure à D et que les hypothèses faites au début de ce numéro soient vérifiées ⁽²⁾, *la courbe intégrale existe et reste intérieure à la gaine G_1 .*

Les exemples qui seront traités dans les *Annales de l'Université de Grenoble* montrent bien que ce résultat peut être bien plus avantageux que les résultats antérieurs.

Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, des signes des fonctions B et φ ; on pourrait perfectionner parfois la méthode

⁽¹⁾ On ramène aisément le cas général à ce cas particulier, en ajoutant aux fonctions $\gamma(t)$ des solutions convenables des équations linéaires homogènes obtenues en supprimant les seconds membres des équations (S').

⁽²⁾ Elles le sont nécessairement pour T assez voisin de t_0 , puisque les $\Delta^1(t)$ tendent vers zéro en même temps que $t - t_0$.

précédente en les faisant intervenir, mais les développements suivants nous dispenseront d'insister sur ce point.

12. Nous donnerons maintenant une *seconde méthode d'estimation des erreurs consistant à calculer d'une façon approchée les intégrales définies donnant les erreurs et à évaluer l'approximation correspondante. En d'autres termes, cette seconde méthode permet de déduire de la courbe intégrale approchée connue C_y une autre courbe intégrale approchée C'_y et une gaine G_2 entourant cette seconde courbe et comprenant la courbe intégrale exacte à son intérieur.*

Si cette gaine G_2 est assez étroite pour que la courbe C_y en sorte, on voit que cette seconde méthode donnera parfois les signes des erreurs que comportent les premières solutions approchées.

Évaluons approximativement chacun des facteurs des produits dont les sommes constituent les fonctions figurant sous les signes \int des intégrales (9).

Nous pouvons écrire d'abord

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} B_i(t) &= h_i(t; x, \dots, x_n) - g_i(t) \\ &= [h_i(t; y_1, \dots, y_n) - g_i(t)] \\ &\quad + [h_i(t; x_1, \dots, x_n) - h_i(t; y_1, \dots, y_n)] \end{aligned} \right.$$

et remplacer $B_i(t)$ par

$$(16) \quad B_i^1(t) = h_i(t; y_1, \dots, y_n) - g_i(t) = f_i(t; y_1, \dots, y_n) - \frac{dy_i}{dt}.$$

L'erreur ainsi commise sur $B_i(t)$ est facile à estimer dès qu'on connaît une gaine G grossièrement déterminée (par la méthode du numéro précédent, par exemple) entourant la solution approchée et comprenant la courbe intégrale exacte à son intérieur. Si dans cette gaine on a

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right| < c_{ij}(t)$$

et si

$$|y_i - x_i| = |\delta_i| < \Delta_i^1,$$

on aura

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} |B_i - B_i^1| &= |h_i(t; x_1, \dots, x_n) - h_i(t; y_1, \dots, y_n)| \\ &< c_{i1} \Delta_1^1 + \dots + c_{in} \Delta_n^1 = \eta_{B_i}(t). \end{aligned} \right.$$

Admettons qu'on sache déterminer exactement les fonctions φ ; nous prendrons comme valeurs approchées des intégrales (9) donnant les δ les intégrales

$$(18) \quad \delta_k^1 = \int_{t_0}^t [B_1^1(x) \varphi_{k1}(t, x) + \dots + B_n^1(x) \varphi_{kn}(t, x)] dx,$$

et, les Φ ayant même signification qu'au numéro précédent, on aura

$$(19) \quad |\delta_k^1 - \delta_k| < \int_{t_0}^t [\mathfrak{W}_1(x) \Phi_{k1}(t, x) + \dots + \mathfrak{W}_n(x) \Phi_{kn}(t, x)] dx = \Delta_k^2(t).$$

Si les fonctions φ n'étaient pas exactement connues, on leur substituerait des fonctions voisines; les relations (18) et (19) subiraient de petites modifications faciles à imaginer.

Les nouvelles intégrales approchées sont

$$y_1^1 = y_1 + \delta_1^1, \quad \dots, \quad y_n^1 = y_n + \delta_n^1,$$

et la gaine G_2 est déterminée par

$$t_0 < t < T; \quad |X_1 - y_1^1| < \Delta_1^2, \quad \dots, \quad |X_n - y_n^1| < \Delta_n^2;$$

T doit être assez voisin de t_0 pour que les points intérieurs à la gaine G_2 soient aussi intérieurs à la gaine G .

Nous donnerons plus tard un exemple où cette méthode se trouve bien supérieure à la précédente.

Il est à peine besoin de dire que, dans l'application de ces dernières méthodes (nos 11 et 12), la remarque du n° 9 relative au système d'ordre supérieur apporte de notables simplifications.

13. Il est naturel de chercher à opérer sur les y^1 comme sur les y et à en déduire un nouveau système de solutions approchées y^2 , et ainsi de suite. Du système y_1^p, \dots, y_n^p on déduit le système $y_1^{p+1}, \dots, y_n^{p+1}$ comme système de solutions des équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_i^{p+1}}{dt} - A_{i1} y_1^{p+1} - \dots - A_{in} y_n^{p+1} = h_i(t; y_1^p, \dots, y_n^p) \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

déterminé par les conditions initiales auxquelles les x doivent satisfaire.

On peut démontrer que *les approximations ainsi obtenues y_1^p, \dots, y_n^p tendent, lorsque p croît indéfiniment, vers des fonctions x_1, \dots, x_n qui sont les solutions exactes du système S.*

Posons en effet

$$\delta_i^{p+1} = y_i^{p+1} - y_i^p;$$

on a

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{d\delta_i^{p+1}}{dt} - A_{i1}\delta_1^{p+1} - \dots - A_{in}\delta_n^{p+1} \\ = h_i(t; y_1^p, \dots, y_n^p) - h_i(t; y_1^{p-1}, \dots, y_n^{p-1}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Soient $c_{ij}(t)$ des limites supérieures des valeurs absolues des dérivées $\frac{\partial h_i}{\partial X_j}$ pour les points t, X_1, \dots, X_n intérieurs à D ; les seconds membres des équations (21) donnent lieu aux inégalités

$$|h_i(t; y_1^p, \dots, y_n^p) - h_i(t; y_1^{p-1}, \dots, y_n^{p-1})| < c_{i1}|\delta_1^p| + \dots + c_{in}|\delta_n^p|.$$

On pourra toujours construire un système linéaire

$$(22) \quad \frac{dv_i}{dt} - \mathfrak{A}_{i1}v_1 - \dots - \mathfrak{A}_{in}v_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tel que pour

$$t_0 \leq \alpha \leq t \leq T$$

les solutions

$$v_1 = \psi_{1i}(t, \alpha), \quad \dots, \quad v_n = \psi_{ni}(t, \alpha) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

déterminées comme au n° 9 par les conditions initiales

$$\psi_{ii}(\alpha, \alpha) = 1, \quad \psi_{ki}(\alpha, \alpha) = 0 \quad (k \neq i)$$

soient finies et dominant respectivement les fonctions $\varphi_{1i}(t, \alpha), \dots, \varphi_{ni}(t, \alpha)$ de mêmes indices ⁽¹⁾.

Nous prendrons alors, pour appliquer les résultats des n°s 11 et 12,

$$\Phi_{ki}(t, \alpha) = \psi_{ki}(t, \alpha)$$

(¹) Il suffirait, par exemple, de prendre pour coefficients \mathfrak{A} des fonctions finies dominant les coefficients correspondants A , mais tout autre procédé de formation du système (22) conviendrait également.

pour toutes les valeurs possibles des indices k et i . Désignons par $\overline{B}_i(t)$ des fonctions dominant dans l'intervalle t_0, T les fonctions $B_i^1(t) = h_i(t, y_1, \dots, y_n) - g_i(t)$ de même indice.

Considérons maintenant les fonctions \mathcal{Q}_i^p définies par les systèmes linéaires

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{d(\mathcal{Q}_i^1)}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathcal{Q}_1^1 - \dots - \mathcal{A}_{in}\mathcal{Q}_n^1 = \overline{B}_i, \\ \frac{d(\mathcal{Q}_i^{p+1})}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathcal{Q}_1^{p+1} - \dots - \mathcal{A}_{in}\mathcal{Q}_n^{p+1} = c_{i1}\mathcal{Q}_1^p + \dots + c_{in}\mathcal{Q}_n^p \\ (i = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

et par les conditions initiales $\mathcal{Q}_i^p = 0$ pour $t = t_0$ quels que soient i et p . Ces fonctions \mathcal{Q}_i^p dominent, dans un certain intervalle issu de t_0 , les fonctions δ_i correspondantes. (On le démontre facilement de proche en proche.)

Les séries

$$(24) \quad \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i^1 + \mathcal{Q}_i^2 + \mathcal{Q}_i^3 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sont uniformément convergentes et leurs sommes sont les solutions du système linéaire

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d(\mathcal{Q}_i)}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mathcal{Q}_1 - \dots - \mathcal{A}_{in}\mathcal{Q}_n = c_{i1}\mathcal{Q}_1 + \dots + c_{in}\mathcal{Q}_n + \overline{B}_i \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

s'annulant pour $t = t_0$. En effet, si les \mathcal{A} , les c et les \overline{B} sont des constantes positives, les intégrales de (25) déterminées par ces conditions initiales sont développables en séries dont les termes sont des polynômes homogènes par rapport aux variables c ; et l'on vérifie sans peine que ces termes coïncident avec les fonctions \mathcal{Q}_i^p que nous venons de définir. Si maintenant les \mathcal{A} , les c et les \overline{B} sont des fonctions de t , on démontre la propriété énoncée en comparant les séries (24) aux séries correspondantes formées avec un système analogue à (25), mais à coefficients constants supérieurs aux coefficients correspondants de (25).

Les sommes \mathcal{Q} des séries (24) sont des fonctions de t positives et croissantes dans l'intervalle de t_0 à T , s'annulant pour $t = t_0$. Nous prendrons T assez voisin de t_0 pour que la gaine

$$(G) \quad t_0 \leq t \leq T, \quad y_1 - \mathcal{Q}_1 \leq X_1 \leq y_1 + \mathcal{Q}_1, \quad \dots, \quad y_n - \mathcal{Q}_n \leq X_n \leq y_n + \mathcal{Q}_n$$

soit intérieure à D. Admettons que cette condition soit satisfaite; les divers termes des séries

$$(26) \quad \delta_i = \delta_i^1 + \delta_i^2 + \delta_i^3 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sont bien définis et sont dominés par les termes correspondants des séries (24); les séries (26) sont alors uniformément convergentes, et l'on vérifie que les sommes $x_i = y_i + \delta_i$ qui sont les limites des approximations y_i^p quand p croît indéfiniment satisfont au système (S).

Le procédé d'approximations successives qui précède avait été employé en Mécanique, mais n'avait pas été justifié jusqu'ici.

Il comprend en particulier le procédé de M. Picard, puisque les A et les \mathfrak{A} peuvent être nuls sans que la théorie précédente cesse d'être valable.

14. Au point de vue de la recherche des erreurs dans l'intégration approchée, ce procédé d'approximation nous donne une nouvelle méthode d'évaluation des erreurs. On a, en effet, dans l'intervalle $t_0 T$ qui vient d'être défini, les inégalités

$$(27) \quad |\delta_i| < \mathfrak{O}_i,$$

$$(28) \quad |\delta_i - \delta_i^1| < \mathfrak{O}_i - \mathfrak{O}_i^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les premières sont à rapprocher des résultats du n° 11, les secondes de ceux du n° 12. On aurait des résultats analogues en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries (26).

Ces résultats présentent, par rapport à ceux des n°s 11 et 12, l'avantage de faire intervenir les fonctions

$$B_i^1(t) = f_i(t; y_1, \dots, y_n) - \frac{dy_i}{dt},$$

qui ne dépendent que des solutions approchées, au lieu des fonctions

$$B_i(t) = f_i(t; x_1, \dots, x_n) - g_i(t),$$

qui dépendent en outre des solutions exactes.

Grâce à cette circonstance, cette nouvelle méthode s'applique au problème suivant :

Trouver des conditions suffisantes pour que des solutions approchées d'un système différentiel ne présentent, par rapport aux solutions exactes, que des erreurs inférieures en valeur absolue à des nombres donnés.

On perfectionnerait ainsi les résultats que nous avons donnés antérieurement ⁽¹⁾.

Le problème dont on vient de rappeler l'énoncé est important pour l'étude des procédés d'intégration approchée (en particulier pour la méthode de Cauchy-Lipschitz).

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, n° 7, t. XXXI, p. 115.