BULLETIN DE LA S. M. F.

R. D'ADHÉMAR

Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 195-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__195_0>

LES FONCTIONS IMPLICITES EN NOMBRE INFINI ET L'ÉQUATION INTÉGRALE NON LINÉAIRE;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

1. Après les mémorables travaux de M. Fredholm sur l'équation intégrale linéaire

$$f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y) f(y)\, dy = G(x), \tag{1}$$

il est naturel de se demander quelles difficultés nouvelles se présenteront pour l'équation intégrale non linéaire.

Soient, par exemple, deux types

$$f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y)\, P[f(y)]\, dy = G(x), \tag{2}$$

$$f(x) + \lambda \int_0^1 F(x, y)\, e^{f(y)}\, dy = G(x); \tag{3}$$

P est un polynome donné; F est le *noyau* donné; la fonction G est donnée et l'inconnue est la fonction f.

M. Goursat a montré tout l'intérêt que présentent les noyaux de la forme

$$\sum_1^\infty g_p(x)\, h_p(y). \tag{4}$$

Nous les appellerons *noyaux de M. Goursat,* et n'étudierons que ceux-là.

Supposons d'abord la somme (4) limitée à n termes et prenons, pour simplifier l'exposition,

$$P(t) = t^2.$$

L'équation (2) donne aussitôt, les z étant des *constantes,*

$$f(x) = G(x) - \lambda \sum_1^n z_p g_p(x).$$

Portons cette valeur dans l'équation (2) : nous avons, pour déterminer les z, n équations du second degré à n inconnues. Donc les z sont *fonctions algébriques* de λ.

Pour $n=2$, nous avons à discuter l'intersection de deux coniques : λ étant quelconque, il y a quatre solutions, finies ou non, réelles ou non.

Pour $n=3$, la discussion est déjà très difficile.

Pour mieux voir encore tout ce qui nous sépare ici du cas linéaire, examinons l'équation, aussi simplifiée que possible,

$$f(x)+\lambda\int_0^1 \overline{f(y)}^2\,dy = G(x).$$

On a évidemment

$$f(x)=G(z)-\lambda z.$$

Et z est donné par une équation du second degré. Au voisinage de $\lambda=0$, nous avons une solution f *finie* et une infinie.

D'autres considérations montrent encore la complexité des équations de M. Fredholm *non linéaires,* et, si je me décide à écrire cette Note, c'est surtout parce que je rencontrerai des systèmes très intéressants de *fonctions implicites en nombre infini.*

2. Soit donc, $\sum$ désignant une série infinie : $\sum_1^\infty$, l'équation

$$(1)\qquad f(x)+\lambda\int_0^1\left[\sum g_p(x)h_p(y)\right]\overline{f(y)}^2\,dy=G(x).$$

On a

$$(2)\qquad f(x)=G(x)-\lambda\sum z_n g_n(x);$$

z_n est une constante. Portons dans (1) la valeur de $f(x)$ [et de $f(y)$] tirée de l'équation (2); le coefficient de $g_p(x)$ doit être *nul,* d'où

$$(3)\qquad z_p=\int_0^1 h_p(y)\left\{\overline{G(y)}^2-2\lambda\,G(y)\left[\sum z_n g_n(y)\right]\right.$$
$$\left.+\lambda^2\left[\sum z_n g_n(y)\right]^2\right\}dy.$$

Donc les constantes z_p sont données par le système d'équations en nombre infini

$$(\mathrm{S}) \qquad z_p = \mathrm{K}_p - 2\lambda \sum_n \alpha_{pn} z_n + \lambda^2 \sum_n \sum_{n'} \beta_{pnn'} z_n z_{n'}.$$

Précisons le mode de convergence du *noyau,* en posant

$$g_n(x) = x^n, \qquad |h_n(y)| < \frac{\mathrm{H}}{\underline{|n}}, \qquad |\mathrm{G}(y)| < \mathrm{M};$$

H et M sont des nombres positifs donnés.

Nous obtenons immédiatement les inégalités

$$\left\{\begin{aligned} |\mathrm{K}_p| &< \frac{\mathrm{HM}^2}{\underline{|p}}, \\ |\alpha_{pn}| &< \frac{\mathrm{HM}}{\underline{|p}} \frac{1}{n+1}, \\ |\beta_{pnn'}| = |\beta_{pn'n}| &< \frac{\mathrm{H}}{\underline{|p}} \frac{1}{n+n'+1}. \end{aligned}\right.$$

Nous allons pouvoir résoudre *le système implicite infini* (S), au voisinage de $\lambda = 0$, par les approximations de M. Picard.

M. Goursat avait déjà, par ce moyen, résolu les systèmes d'équations en nombre fini (*Bull. de la Soc. math. de France,* 1903).

Nous partons de la solution évidente

$$(4) \qquad z_p^0 = \mathrm{K}_p$$

pour $\lambda = 0$.

D'où le calcul de z^1, z_p^2, etc., par les équations

$$(5) \qquad z_p^{q+1} = \mathrm{K}_p - 2\lambda \sum_n \alpha_{pn} z_n^q + \lambda^2 \sum_n \sum_{n'} \beta_{pnn'} z_n^q z_{n'}^q.$$

1° Il faut que les z_n^q soient *limités* de façon que les séries écrites convergent.

2° Il faut que z_p^q ait une limite pour $q = \infty$, c'est-à-dire que la série σ_p *converge,* étant posé

$$\sigma_p = \sum_q (z_p^{q+1} - z_p^q).$$

3° Enfin, il faut étudier les conditions d'*unicité* de la solution.

3. *Première question.* — Si λ est assez petit, si l'on a, U étant un nombre *positif*,

$$|z_n^q| < \frac{L}{\lfloor n}, \qquad L = HM^2 + U,$$

il en sera de même pour

$$|z_n^{q+1}|.$$

Soit, en effet,

$$P = \sum_n \frac{1}{\lfloor n+1},$$

$$Q = \sum_n \sum_{n'} \frac{1}{n+n'+1} \frac{1}{\lfloor n} \frac{1}{\lfloor n'}.$$

Nous avons

$$|z_p^{q+1}| < \frac{HM^2 + 2\lambda HMLP + \lambda^2 HL^2 Q}{\lfloor p}.$$

Nous prendrons donc $\lambda \leqq \lambda_1$, de sorte que l'on ait

$$2\lambda HMLP + \lambda^2 HL^2 Q < U.$$

4. *Deuxième question.* — Posons

$$(1) \qquad \Delta_n^{q-1} = |z_n^q - z_n^{q-1}|,$$

et soit Δ^{q-1} un nombre supérieur ou égal au plus grand des Δ_n^{q-1} quand n prend toutes les valeurs entières. Si la série

$$(2) \qquad \sum_q \Delta^q$$

est convergente, *a fortiori* l'une quelconque des séries σ_p convergera.

Nous avons ici des fonctions d'une infinité de variables dont les dérivées partielles sont bien déterminées,

$$z_p^{q+1} = K_p + f_p(z_n^q) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ayant $\beta_{pnn'} = \beta_{pn'n}$, ce qui double le coefficient du terme rectangle $(z_n z_{n'})$, tandis que le coefficient du carré (z_n^2) reste unique; nous avons pour la dérivée l'expression (3) :

$$\frac{\partial f_p}{\partial z_n} = -2\lambda\alpha_{pn} + 2\lambda^2 \sum_i \beta_{pni} z_i \tag{3}$$

(l'indice supérieur des z est ici inutile).

Le module de cette dérivée reste moindre que

$$T_{pn} - 2\lambda \frac{HM}{\lfloor p} \frac{1}{n+1} + 2\lambda^2 \frac{HL}{\lfloor p} \sum_i \frac{1}{n+i+1} \frac{1}{\lfloor i} = \frac{1}{\lfloor p} \frac{\lambda}{n+1}(c+\lambda c').$$

Or le théorème des accroissements finis s'étend sans peine à la fonction f_p, d'où

$$\Delta_p^q < \sum_n \Delta_n^{q-1} T_{pn}. \tag{4}$$

La question serait achevée si nous avions un nombre fini de z_p. Mais ici la série

$$\sum_n T_{pn}$$

ne converge pas.

Il faut alors observer que l'on a

$$T_{2n} = \frac{1}{\lfloor 2} T_{1n}, \qquad T_{3n} = \frac{1}{\lfloor 3} T_{1n}, \qquad \dots \tag{5}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} |z_1^q - z_1^{q-1}| < \sum_n |z_n^q - z_n^{q-1}| T_{1n}, \\ |z_2^q - z_2^{q-1}| < \sum_n |z_n^q - z_n^{q-1}| T_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{6}$$

Donc Δ^{q-1}, limite supérieure des Δ_i^{q-1}, peut être pris égal à Δ_1^{q-1} et nous pouvons écrire

$$\Delta_i^{q-1} \leqq \frac{\Delta_1^{q-1}}{\lfloor i}. \tag{7}$$

L'inégalité (4) devient

$$\Delta_p^q < \Delta_1^{q-1} \left\{ T_{p1} + \frac{T_{p2}}{\lfloor 2} + \frac{T_{p3}}{\lfloor 3} + \dots \right\}.$$

Il suffit, alors, d'exprimer la convergence de la série

$$\sum_q \Delta_1^q, \tag{2'}$$

c'est-à-dire, ici μ étant moindre que *un*, d'écrire

$$\Delta_1^q < \mu \Delta_1^{q-1}$$

ou encore

$$\lambda(c+\lambda c')\left(\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\right)<1,$$

$$\lambda \leqq \lambda_2.$$

5. *Troisième question.* — Nous avons obtenu une solution

$$z_p = \lim_{q=\infty} z_p^q = z_p^\infty,$$

$$|z_p| < \frac{L}{\underline{|p}}. \tag{1}$$

Peut-on avoir une autre solution u_p? La réponse *est négative* si l'on a

$$|u_p| < \frac{N}{\underline{|p}}.$$

Écrivons, en effet,

$$u_p = K_p + f_p(u_n),$$

$$z^{q-1} = K_p + f_p(z_n^q).$$

Nous avons l'inégalité analogue de (4) (n° 4),

$$|u_p - z_p^{q+1}| < \sum_n |u_n - z_n^q|\, T'_{pn};$$

T'_{pn} est l'analogue de T_{pn}, formé avec le plus grand des nombres L, N.

Nous avons encore ici l'égalité analogue de (5) (n° 4),

$$T'_{1n} = \frac{1}{\underline{|p}} T'_{1n}.$$

Désignons donc une limite supérieure de

$$|u_1 - z_1^q|$$

par le symbole

$$|u_1 - z_1^q|_M.$$

Nous aurons l'inégalité analogue de (7) (n° 4) :

$$|u_2 - z_2^q|_M = \frac{1}{\lfloor 2}|u_1 - z_1^q|_M,$$

$$|u_3 - z_3^q|_M = \frac{1}{\lfloor 3}|u_1 - z_1^q|_M,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'où

$$|u_1 - z_1^{q+1}|_M < |u_1 - z_1^q|_M \left(T'_{11} + \frac{T'_{12}}{\lfloor 2} + \frac{T'_{13}}{\lfloor 3} + \ldots\right).$$

Donc, pour $\lambda \leqq \lambda_3$, nous avons

$$|u_1 - z_1^{q+1}|_M < \mu_1 |u_1 - z_1^q|_M,$$

μ_1 étant moindre que 1. D'où

$$u_1 - z_1^\infty \equiv u_1 - z_1 = 0,$$
$$u_p - z_p = 0.$$

Ce résultat paraît très particulier, mais il se généralise aussitôt. Par exemple, supposons que les u_n donnent lieu aux inégalités

$$|u_p| < \frac{N}{(1+a)^p}, \qquad a > 0,$$

de sorte que la convergence de la solution soit ici assurée pour des valeurs assez petites de x, tandis que précédemment $\sum u_n x^n$ convergeait quel que soit x.

La fonction $\lfloor x$ croît infiniment plus vite que $(1+a)^x$, de sorte que l'inégalité (1) du n° 5 peut être remplacée par

$$(1') \qquad |z_p| < \frac{L'}{(1+a)^p}.$$

Nous sommes ramenés au cas précédent, puisque les *majorantes* choisies pour les u et les z ont *même mode de convergence*.

D'où $u_p = z_p$ lorsque λ est assez petit.

En général, on prouvera l'unicité de la solution, λ étant assez petit, en considérant le mode de convergence *le plus désavantageux* des suites z_p et u_p, et en ramenant les deux modes de convergence à celui-là.

6. Nous pouvons traiter de même l'équation (3) de l'introduction, liée à l'équation célèbre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda e^u,$$

avec un noyau de M. Goursat : $\sum g_p(x)\, h_p(y)$. Annulons le coefficient de $g_p(x)$, après avoir porté dans l'intégrale la valeur

$$f(y) = \mathrm{G}(y) - \lambda \sum z_n g_n(y).$$

Nous obtenons le système

$$(\mathrm{S}) \qquad z_p = \int_0^1 h_p(y)\, e^{\mathrm{G}(y) - \lambda \sum z_n g_n(y)}\, dy.$$

Pour $\lambda = 0$, nous avons la solution

$$z_p^0 = \int_0^1 h_p(y)\, e^{\mathrm{G}(y)}\, dy \equiv \mathrm{K}_p,$$

et nous écrivons, de proche en proche,

$$z_p^{q+1} = \int_0^1 h_p(y)\, e^{\mathrm{G}(y) - \lambda \sum z_n^q g_n(y)}\, dy.$$

Si nous prenons encore

$$g_p(x) = x^p, \qquad |\, e^{\mathrm{G}(y)} \,| < \mathrm{M}, \qquad h_p(y) \,| < \frac{\mathrm{H}}{\underline{|p}},$$

nous sommes ramenés aux trois questions du cas précédent.

Partons des inégalités

$$|\, z_p^0 \,| < \frac{\mathrm{HM}}{\underline{|p}}.$$

Soit U un nombre positif, soit $\mathrm{L} = \mathrm{HM} + \mathrm{U}$; nous aurons pour $\lambda \leqq \lambda_1$

$$|\, z_p^q \,| < \frac{\mathrm{L}}{\underline{|p}}.$$

Puis nous écrirons

$$z_p^{q+1} - z_p^q = \int_0^1 h_p(y)\, e^{\mathrm{G}(y)} \left\{ e^{-\lambda \sum z_n^q g_n(y)} - e^{-\lambda \sum z_n^{q-1} g_n(y)} \right\} dy.$$

Appliquons encore le théorème des accroissements finis, généralisé, à la fonction sous le signe; majorons de la même façon : nous retrouvons nos systèmes d'inégalités; cela conduit à prendre $\lambda \leqq \lambda_2$ pour assurer la convergence de la série

$$\sum_q (z_p^{q+1} - z_p^q),$$

et à prendre $\lambda \leqq \lambda_3$ pour assurer l'unicité de la solution dans des conditions très larges.

7. En résumé, pour *l'équation intégrale non linéaire,* la fonction inconnue entrant sous le signe somme sous forme transcendante, ou sous forme de polynome, on peut former une solution, pour des valeurs de λ *assez petites.*

Des noyaux de forme très générale peuvent être mis sous la forme de noyaux de M. Goursat [1].

La majorante de notre noyau était

$$H \sum \frac{x^n}{\lfloor n} \qquad (x \text{ quelconque});$$

nous obtenons une solution ayant le même mode de convergence. Nous aurions pu, aussi bien, prendre pour type de majorante

$$H \sum x^n q^n$$

$$[g_p(x) = x^p, \qquad |h_p(y)| < H q^n, \qquad |xq| < 1].$$

Quel que soit le mode de convergence, la théorie est la même. Nous pourrions, aussi, généraliser beaucoup cette théorie des *systèmes implicites infinis* et l'étendre aux systèmes d'*équations différentielles en nombre infini.*

Faisons encore une remarque sur l'équation (1) du n° 2, dans le cas où *il n'y a pas de second membre.*

$G(x)$ étant identiquement nul, le système (S) aura ici la forme

$$(S') \qquad z_p = \lambda^2 \sum_1^\infty \sum_1^\infty \beta_{pnn'} z_n z_{n'}.$$

---

[1] On consultera, sur cette question, la belle *Dissertation* de M. E. Schmidt (*Math. Annalen,* t. LXIII).

Nous avons une solution évidente qui est

$$0 \equiv z_1 = z_2 = z_3 = \ldots.$$

Il semble qu'il y ait d'autres solutions *finies,* car l'on pourrait avoir des approximations convergeant, le point de départ z_p^0 étant arbitraire, tel seulement que l'on ait, par exemple,

$$|z_p^0| < \frac{A}{\underline{|p}},$$

A étant un nombre positif donné.

Ceci est illusoire; on montre facilement que deux solutions finies sont identiques. Or nous avons la solution *zéro;* donc c'est *la seule,* lorsque λ est assez petit.

Nous voyons quelles difficultés énormes entraîne le cas non linéaire : nous sommes en présence de fonctions multiformes fort peu accessibles (¹).... Par les moyens élémentaires ici employés, nous arriverons à suivre une solution depuis le point $\lambda = 0$ jusqu'au point $\lambda = l$, le plus voisin de l'origine, où s'annule le *jacobien* du système de fonctions implicites.

J'aurai bientôt à revenir sur ces questions.

(¹) Pendant que j'écrivais ces pages, M. E. Schmidt a publié une Note sur ces questions (*Mathematische Annalen,* t. LXV). Le point de vue paraît, au premier abord, tout différent du mien. On sait, d'ailleurs, combien M. E. Schmidt est compétent dans cet ordre d'idées.

Nous devons rappeler les principaux travaux relatifs aux équations intégrales linéaires à limites d'intégration constantes :

I. Fredholm, *Acad. de Stockholm,* 1900, et *Acta mathematica,* t. XXVII. — D. Hilbert, *Nachrichten zu Göttingen,* 1904 à 1906. — Erhard Schmidt, *Mathematische Annalen,* t. LXIII, LXIV. — E. Picard, *Circolo di Palermo* et *Ann. Éc. Norm.,* 1906. — MM. Goursat et Lebesgue, *Bull. de la Soc. math. de France,* 1907 et 1908. — *Thèse* de M. Bryon-Heywood, 1908. — Dissertations inaugurales (*Göttingen*) de Mme Lebedeff, de MM. Kellogg, Weyl, Hilb, Hellinger, Andrae.

Citons aussi MM. Mason, Riesz, Bateman.

Les résultats fondamentaux de M. Fredholm sont exposés dans un Livre de l'auteur (sous presse), *Exercices et leçons d'Analyse* (Gauthier-Villars).

Pour les *applications,* nous devons citer surtout : J. Plemelj, *Monatshefte für Mathem. u. Physik,* t. XV et XVIII. — G. Lauricella, *Annali di Matematica,* 3e série, t. XIV, et *R. Acc. dei Lincei,* 1906 et 1907. — *Voir* aussi l'article de M. Pincherle dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.*