BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur l’expression asymptotique de la fonction de Bessel

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 77-85

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__77_1>

SUR L'EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE BESSEL;

PAR M. HADAMARD.

On sait que la fonction de Bessel

$$(1) \qquad J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots$$

et la fonction

$$(1') \qquad J_0(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots,$$

qui s'en déduit par le changement de x en ix, admettent des développements formels qui en font connaître les valeurs asymptotiques pour x très grand, mais qui sont divergents.

Il existe, comme j'avais eu l'occasion de le constater précédemment ([1]), un moyen de rendre ces développements convergents. Il consiste à ajouter aux termes successifs des parties correctives dont chacune est sans influence sur la valeur asymptotique du

---

([1]) *Transactions of the American math. Society*, t. III, octobre 1902, p. 421-422.

résultat, mais qui, par leur ensemble, rétablissent la convergence de la série.

C'est la méthode bien connue par laquelle on parvient aux développements donnés par M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes présentant des singularités polaires ou essentielles en nombre infini ([1]).

Je ne sais s'il a été remarqué que ces séries convergentes peuvent être obtenues d'une manière effective pour les fonctions (1) et (1'). Du moins pourrons-nous les écrire en y laissant subsister une intégrale définie; mais celle-ci est infiniment petite par rapport à toutes les erreurs commises, de sorte que les séries ainsi formées présentent bien la double propriété :

1° De converger et de fournir une expression exacte des fonctions cherchées;

2° D'en fournir une valeur asymptotique, lorsqu'on les arrête à un nombre déterminé quelconque de termes.

1. Partons d'abord de la fonction $J_0(ix)$. Supposons, pour fixer les idées, x réel, moyennant quoi nous ne diminuerons pas la généralité en le supposant positif.

On a

$$J_0(ix) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi}\,d\varphi, \tag{2}$$

ou

$$J_0(ix) = \frac{e^x}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2x\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi. \tag{2'}$$

Posons

$$\sin\frac{\varphi}{2} = u;$$

nous aurons

$$J_0(ix) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 e^{-2u^2x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{3}$$

([1]) *Voir* HERMITE, *Cours autographié*, 11e leçon; GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 164; etc.

Remplaçons $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ par son développement :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{u^2}{2} + \ldots + c_n u^{2n} + \ldots, \tag{4}$$

$$c_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}. \tag{5}$$

La série ainsi obtenue,

$$\frac{2e^x}{\pi}\left(\int_0^1 e^{-2u^2x}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 e^{-2u^2x}\,du + \ldots + c_n\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2x}\,du + \ldots\right), \tag{6}$$

converge et représente $J_0(ix)$.

Nous allons même trouver une limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on s'arrête à un terme quelconque.

A cet effet, commençons par évaluer le reste de la série du binome qui figure dans la formule (4).

Soit

$$R_n = c_{n+1} u^{2(n+1)} + \ldots + c_{n+p} u^{2(n+p)} + \ldots.$$

On a évidemment

$$R_n < c_1 u^{2(n+1)} + \ldots + c_p u^{2(n+p)} + \ldots,$$

et, *a fortiori,*

$$R_n < \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{7}$$

Si donc, dans l'égalité (3), nous remplaçons $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ par l'ensemble des $(n+1)$ premiers termes de (4), l'erreur commise sur $J_0(ix)$,

$$\frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 e^{-2u^2x} R_n\,du,$$

sera inférieure au produit de $\frac{2e^x}{\pi}$ par l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-2u^2x} u^{2n} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{8}$$

Si n est plus petit que $2x$, il convient, pour trouver une limite supérieure de la quantité (8), de prendre le maximum du produit

$e^{-2u^2x}u^{2n}$. Ce maximum a lieu pour $u^2 = \frac{n}{2x}$ et a la valeur $\left(\frac{n}{2x}\right)^n e^{-n}$. L'erreur commise sur $J_0(ix)$ est donc inférieure à

$$e^x\left(\frac{n}{2ex}\right)^n,$$

ou, si l'on veut, à

$$\frac{e^x}{\sqrt{2n\pi}}\frac{n!}{(2x)^n}, \tag{9}$$

ce qui met bien en évidence la façon dont l'ordre asymptotique de cette erreur décroît lorsque n augmente.

Pour $n > 2x$, nous remarquerons que l'intégrale (8) est inférieure à celle qu'on en déduit en supprimant le facteur e^{-2u^2x}, c'est-à-dire à

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}c_n,$$

ou, encore, à

$$\frac{K}{\sqrt{n}},$$

K étant un nombre fini.

Mais on peut préciser davantage en décomposant l'intégrale en deux parties, l'une prise de o à $\sqrt{\theta}$, l'autre de $\sqrt{\theta}$ à 1. On a

$$\int_0^{\sqrt{\theta}} e^{-2u^2x}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}du < \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} < \theta^n \int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-\theta u^2}} < \frac{\pi}{2}\theta^n c_n,$$

$$\int_{\sqrt{\theta}}^1 e^{-2u^2x}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}du < e^{-2\theta x}\int_0^1 \frac{u^{2n}\,du}{\sqrt{1-u^2}} < \frac{\pi}{2}c_n e^{-2\theta x}.$$

Donc la quantité (8) est inférieure à

$$\frac{K}{\sqrt{n}}(\theta^n + e^{-2\theta x}),$$

ou, en faisant

$$\theta = e^{-\frac{2x}{n}},$$

à

$$\frac{2K}{\sqrt{n}}e^{-2\theta x}.$$

L'erreur commise sur $J_0(ix)$ sera donc plus petite que

$$\frac{2K}{\sqrt{n}}e^{\eta x}, \tag{9'}$$

où $\eta = 1 - 2\theta$ est, d'après ce qui précède, toujours plus petit que 1 et tend vers -1 lorsque n augmente indéfiniment, x restant constant $\left(\text{ou, plus généralement, lorsque } \frac{n}{2x} \text{ augmente indéfiniment}\right)$.

Il reste à évaluer un terme quelconque

$$\frac{2e^x}{\pi} c_n \int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du \tag{10}$$

de la série (6).

On a

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du = \frac{1}{(2x)^n \sqrt{2x}} \int_0^{\sqrt{2x}} u^{2n} e^{-u^2}\, du$$

et

$$\int_0^{\sqrt{2x}} u^{2n} e^{-u^2}\, du = (-1)^n \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-\lambda u^2}\, du\right)_{\lambda=1}.$$

Si donc on pose

$$\mathcal{E}(z) = \int_z^\infty e^{-u^2}\, du,$$

d'où

$$\int_0^z e^{-u^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \mathcal{E}(z)$$

et

$$\mathcal{E}'(z) = -e^{-z^2}, \tag{11}$$

il viendra

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du = \frac{(-1)^n}{(2x)^n \sqrt{2x}} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}(\sqrt{2\lambda x}) \right] \right\}_{\lambda=1}.$$

En effectuant la dérivation du second membre ou encore par des intégrations par parties successives, nous trouvons

$$\int_0^1 u^{2n} e^{-2u^2 x}\, du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{1}{(2x)^n} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}\sqrt{2x}\right) - \frac{2e^{-2x} \mathcal{X}_n}{\sqrt{\pi}\, c_n},$$

$\mathfrak{X}_n$ étant un polynome entier en $\frac{1}{x}$ tel que

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2\mathfrak{X}_n}{\sqrt{\pi}c_n} &= \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2x}\right)^n+\ldots \\ &+\frac{1.3.5\ldots(2n-2p-1)}{2^{n-p}}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-p+1}+\ldots+\frac{1}{2x}, \end{aligned}\right.$$

où C_n^p est un coefficient binomial.

La valeur du terme (10) est donc exprimée à l'aide de fonctions élémentaires et de la quantité $\mathcal{E}(\sqrt{2x})$.

Mais cette dernière est d'ordre très petit par rapport aux quantités que nous nous proposons de calculer. Si nous posons

$$(13)\qquad \mathcal{E}(z) = \int_z^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}e^{-z^2}}{2}\varepsilon(z^2),$$

$\varepsilon(z)$ a pour partie principale $\frac{1}{z\sqrt{\pi}}$ lorsque z est très grand.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

La fonction $J_0(ix)$ *est représentée, pour* $x > 0$, *par la série*

$$(14)\quad J_0(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{k_n}{(2x)^n}[1-\varepsilon(2x)e^{-2x}] - e^{-2x}\sqrt{2x}\,\mathfrak{X}_n\right\},$$

dans laquelle

$$(15)\qquad k_n = c_n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}\right]^2,$$

pendant que $\mathfrak{X}_n$ *est le polynome en* $\frac{1}{x}$ *défini par la formule* (12); $\varepsilon(2x)$, *la quantité définie par la formule* (13) (*et qui a pour partie principale* $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$ *quand* x *est très grand*).

Cette série converge pour toute valeur positive de x. *L'erreur commise en s'arrêtant au* $n^{\text{ième}}$ *terme est inférieure à la plus petite des expressions*

$$(9)\qquad \varkappa_n\frac{e^x}{(2x)^n}\qquad \left(\varkappa_n = \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}}\right)$$

et

$$(9')\qquad \frac{K e^{\eta x}}{\sqrt{n}},$$

où K est une constante et η tend vers -1 *quand* $\frac{n}{x}$ *augmente indéfiniment.*

On retombe sur les valeurs asymptotiques classiques en limitant la série (14) et en y supprimant les termes en $\mathfrak{X}_n$ et en $\varepsilon(2x)$.

2. Nous arriverons à des résultats analogues pour la fonction (1) moyennant une transformation préalable de l'intégrale

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\,d\varphi, \tag{16}$$

qui représente cette fonction.

En opérant tout d'abord sur elle comme sur l'intégrale (2), nous obtenons l'expression analogue à (3)

$$J_0(x) = \frac{2e^{ix}}{\pi}\int_0^1 e^{-2iu^2x}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{17}$$

Celle-ci, par le changement de u en $\sqrt{u}$, devient

$$J_0(x) = \frac{e^{ix}}{\pi}\int_0^1 e^{-2iux}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}. \tag{17$'$}$$

Supposons encore x positif. Intégrons le long d'un carré ABCD dont le côté AB sera le segment 0 —— 1 de l'axe réel, pendant que les côtés AC, BD sont situés en dessous de cet axe, l'un suivant la partie négative de l'axe imaginaire, l'autre suivant la partie correspondante de la parallèle à cet axe menée par le point $x = 1$. Nous aurons

$$\int_0^1 e^{-2iux}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_{AC} - \int_{BD} + \int_{CD}.$$

Les deux intégrales $\int_{AC}$, $\int_{BD}$ peuvent immédiatement s'obtenir à l'aide des expressions précédemment calculées. On doit, en effet, y remplacer u, soit par $-iv$, soit par $1 - iv$, v étant une variable réelle et positive, et écrire

$$\int_{AC} - \int_{BD} = -i\int_0^1 \frac{e^{-2vx}\,dv}{\sqrt{-iv}\sqrt{1+iv}} + ie^{-2ix}\int_0^1 \frac{e^{-2vx}\,dv}{\sqrt{iv}\sqrt{1-iv}}.$$

Dans cette formule, les radicaux $\sqrt{1-iv}$, $\sqrt{1+iv}$ doivent être pris avec leurs parties réelles positives, pendant que les radicaux $\sqrt{-iv}$, $\sqrt{iv}$ ont pour arguments respectifs $-\frac{i\pi}{4}$, $+\frac{i\pi}{4}$.

Si maintenant nous revenons à la variable $u=\sqrt{v}$, nous aurons

$$(18)\qquad J_0(x)=-\frac{2i}{\pi}\left(e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{-2u^2x}\,du}{\sqrt{1+iu^2}}-e^{-i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{-2u^2x}\,du}{\sqrt{1-iu^2}}\right)+S,$$

$$(19)\qquad S=\frac{e^{ix}}{\pi}\int_{CD}\frac{e^{-2iux}\,du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Il est clair que les deux intégrales de la formule (18) ont des développements identiques à (6), la variable u^2 étant changée en $\pm iu^2$.

La convergence de ces développements est ici améliorée du fait des alternances de signe qu'ils présentent. Le reste R_n de la série (4) est alors (¹) au plus de l'ordre de $c_n u^{2n}$, de sorte que les limites (9) et (9′) précédemment assignées à l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série peuvent être respectivement remplacées par

$$(20)\qquad \frac{(n-1)!}{(2x)^n}$$

et

$$(20')\qquad \frac{K e^{\eta' x}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

η' étant négatif et tendant vers -2 pour $\frac{n}{x}=\infty$.

Quant au terme complémentaire S, il est visiblement au plus de l'ordre de e^{-2x}, puisque dans l'intégrale de la formule (19) on a $u=-i+v$, v étant réel (²).

(¹) Il en est ainsi, d'ailleurs, toutes les fois que l'argument de u^2 est différent de zéro, comme le montre l'expression, aisée à former, de R_n :

$$R_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)c_n}{\sqrt{1-u^2}}\,u^{2n+2}\,\tau_n(u^2),$$

$$\tau_n(u^2)=\int_0^1\frac{\xi^n\,d\xi}{\sqrt{1-\xi u^2}}.$$

(²) S est, en réalité, de l'ordre de $\frac{e^{-2x}}{x}$. On peut d'ailleurs le développer en une

La formule (18), mise sous forme réelle, conduit au développement suivant (toujours pour $x > 0$) :

$$(21)\quad J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{k_{2n}}{(2x)^{2n}}\left[1-\varepsilon(2x)e^{-2x}\right]-e^{-2x}\sqrt{2x}\,\mathcal{K}_{2n}\right\}\\ -\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sum(-1)^n\left\{\frac{k_{2n+1}}{(2x)^{2n+1}}\left[1-\varepsilon(2x)e^{-2x}\right]-e^{-2x}\sqrt{2x}\,\mathcal{K}_{2n+1}\right\}\end{array}\right\}+$$

où k_n, $\mathcal{K}_n$ et ε sont encore définis par les formules (15), (12), (13) *et où l'erreur commise sur la série lorsqu'on arrête celle-ci à son $n^{ième}$ terme est inférieure en valeur absolue à la plus petite des quantités*

$$(20)\qquad \frac{(n-1)!}{(2x)^n}$$

et

$$(20')\qquad \frac{Ke^{\eta' x}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

(η' *tendant vers* -2 *pour* $\frac{n}{x}=\infty$).

L'erreur restante S *est d'ordre inférieur à* e^{-2x}.

Nous avons donc encore rendu convergente la série classique. Seulement elle ne représente plus la fonction. Mais la différence S est d'un ordre inférieur à celui d'un terme déterminé quelconque de la série.

Bien entendu, les formules (14) et (21) s'étendent aux valeurs imaginaires de x, sous des restrictions que nous n'examinerons d'ailleurs pas ici.