

BULLETIN DE LA S. M. F.

O. BLUMENTHAL

Sur le mode de croissance des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 213-232

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__213_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__213_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE MODE DE CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. OTTO BLUMENTHAL.

Soit $f(z)$ une fonction entière de z . Posons $z = re^{i\varphi}$ et désignons par $G(r, \varphi)$ le module de f , par $A(r, \varphi)$ et $B(r, \varphi)$ ses parties réelle et imaginaire. Soient, en outre, $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ les valeurs maxima de G , A , B sur le cercle de rayon r .

Nous allons établir sur ces fonctions quelques propositions d'ordre général qui me paraissent indispensables pour fonder solidement la théorie des fonctions entières. Il semble que ces théorèmes n'aient pas encore été démontrés explicitement, quoique, dans leurs grandes lignes, ils n'offrent peut-être rien de nouveau pour ceux qui s'occupent des fonctions entières.

Les propositions que je vais établir sont valables pour les trois fonctions $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ et de même pour les valeurs minima des fonctions G , A , B . Je me bornerai à les démontrer pour $M(r)$, la démonstration pour les autres fonctions étant ou identique ou plus facile.

1. J'appellerai *fonction (courbe) algébroïde entière* une fonction (courbe) réelle

$$y = y(x)$$

de la variable réelle x , qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1° Elle est finie et continue pour toutes les valeurs finies de x .
- 2° Pour toutes les valeurs de x , sauf au plus pour une infinité dénombrable de points tendant vers l'infini comme point limite unique, y est analytique et régulière en x .
- 3° Pour les valeurs exceptionnelles y admet des développements à la Puiseux, suivant des puissances fractionnaires de x .

Ceci posé, voici la proposition à établir :

La fonction (courbe) $M(r)$, évidemment monodrome, continue et croissante, se compose d'un nombre fini ou infini de-

nombrable de parties de fonctions (arcs de courbes) algébroides. Les valeurs (points) de rencontre de deux parties de fonctions (arcs de courbes) différentes sont en nombre fini ou n'ont qu'une valeur (point) limite unique à l'infini ⁽¹⁾. De plus, on sait que $M(r)$ tend vers l'infini avec r .

En particulier donc, la courbe sera partout analytique et algébroïde sauf pour les points de rencontre où il y aura, en général, discontinuité de la tangente et des dérivées supérieures.

Ces propriétés sont bien mises en relief par un exemple simple, mais très instructif, qu'on trouvera au n° 10 de ce travail.

2. Remarques préliminaires. — Pour éviter des renvois nombreux, je commencerai par rappeler quelques faits connus qui nous seront utiles dans la suite.

A, B et $\log G$ satisfont à l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Nous en tirons le lemme suivant :

Une fonction entière $f(z)$, qui a une valeur absolue constante sur un cercle de rayon R ayant l'origine comme centre, est nécessairement de la forme az^m .

D'abord, si f n'a pas de racines à l'intérieur du cercle, $\log G$, étant constant sur sa périphérie et fini à son intérieur, est une constante, et il en est de même de $f(z)$.

Soient donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ celles des racines de f à l'intérieur du cercle qui sont différentes de zéro. Nous appellerons $r_k = |z - \alpha_k|$ la distance d'un point variable z au point α_k et $r'_k = |z - \alpha'_k|$ la distance de z au point α'_k symétrique à α_k par rapport au cercle (R). On sait alors que

$$\log \frac{r_1 r_2 \dots r_p}{r'_1 r'_2 \dots r'_p}$$

⁽¹⁾ J'ai énoncé ce théorème deux fois sans démonstration : dans la thèse de M. A. KRAFF, *Ueber ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung* (Dissertation, Göttingen, 1903) ; et *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, février 1907. Du reste, on peut, par nos méthodes et presque sans aucun changement, démontrer une proposition analogue sur les séries de Taylor à l'intérieur de leur cercle de convergence.

a une valeur constante sur le cercle. Du reste $\log G$, devenant infini comme $\log r_k$ au point z_k , est nécessairement de la forme

$$\log G = \text{const.} + \log \frac{r_1 r_2 \dots r_p}{r_1' r_2' \dots r_p'} + m \log r,$$

si l'origine est un zéro d'ordre m de $f(z)$.

Donc $\log G$ deviendrait infini positif aux points $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p$. Ceci étant impossible, puisque $f(z)$ est entière, il vient

$$\log G = \text{const.} + m \log r,$$

ce qui prouve notre proposition (1).

Nous excluons constamment par la suite les puissances az^m .

Une autre forme du même lemme est alors la suivante :

La dérivée $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ ne peut s'annuler tout le long d'un cercle ayant l'origine comme centre.

En coordonnées polaires r, φ , l'équation $\Delta u = 0$ a la forme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

On en conclut que

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$$

satisfont encore à l'équation de Laplace.

3. Nous posons

$$(1) \quad \begin{cases} f(z) = \sum a_n z^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ a_n = a'_n + i a''_n. \end{cases}$$

Alors

$$(2) \quad \begin{cases} A(r, \varphi) = a'_0 + \sum_n r^n (a'_n \cos n\varphi - a''_n \sin n\varphi), \\ B(r, \varphi) = a''_0 + \sum_n r^n (a''_n \cos n\varphi + a'_n \sin n\varphi). \end{cases}$$

(1) Bien entendu, on peut aussi la démontrer sans faire intervenir explicitement la théorie du potentiel.

Par suite de la décroissance rapide des quantités a_n , les séries (2) restent uniformément et absolument convergentes, même si l'on y admet pour r des valeurs complexes dont le module ne dépasse pas une quantité arbitraire R , et pour φ des valeurs complexes ayant un module $\leq 2\pi$. Par suite, d'après un théorème connu, on peut y remplacer $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ par leurs développements de Taylor et changer l'ordre des termes, de façon à obtenir

$$(3) \quad A(r, \varphi) = a'_0 + r \sum_{k,l} c'_{kl} r^k \varphi^l, \quad B(r, \varphi) = a''_0 + r \sum_{k,l} c''_{kl} r^k \varphi^l,$$

et ces séries convergent uniformément et absolument à l'intérieur de tout cercle arbitrairement grand ayant son centre à l'origine du plan des z .

Il en est de même de

$$(4) \quad G^2(r, \varphi) = A^2(r, \varphi) + B^2(r, \varphi) = g_0 + r \sum_{k,l} g_{lk} r^k \varphi^l.$$

Les expressions (3) et (4) montrent que

$$\frac{\partial A(0, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial B(0, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial G(0, \varphi)}{\partial \varphi}$$

s'annulent identiquement en φ ⁽¹⁾.

4. Considérons maintenant l'ensemble des valeurs (r, φ) pour lesquelles

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0.$$

Voici la proposition à prouver :

Dans tout le plan, l'ensemble des points pour lesquels $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ forme au plus une suite dénombrable de courbes algébriques; il n'y a qu'un nombre fini de ces courbes (ou de leurs branches) qui pénètrent dans l'intérieur d'un cercle (R).

(¹) Ce fait, évident dans le cas où $g \neq 0$, se vérifie aisément dans le cas général à l'aide des formules (2).

Tout d'abord, il ne peut exister de point *isolé* pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Cela est évident pour le point $r = 0$. Écartons ce cas et supposons en premier lieu que le point isolé ne soit pas un zéro de G . Alors

$$\frac{\partial \log G}{\partial \varphi} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

s'annule en ce point et reste finie et continue dans son voisinage. Traçons autour du point un cercle c aussi petit que nous voudrons. $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$, et par suite $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$, doit changer de signe et, par suite, s'annuler sur le cercle, car, puisque $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ satisfait à l'équation de Laplace, on a, d'après le théorème de la moyenne arithmétique,

$$\int_{(c)} \frac{\partial \log G}{\partial \varphi} ds = 0,$$

ds désignant l'élément de l'arc du cercle c . Donc le point n'est pas un zéro isolé de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$.

Supposons en second lieu que G s'annule en même temps que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$. Nous considérons alors le cercle (r) ayant son centre à l'origine et passant par le point. Il est évident que, sur ce cercle, $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe au point $G = 0$. Entourons donc encore ce point d'un petit cercle c , on voit que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe et, par suite, s'annule sur c .

Pour établir notre proposition, nous n'avons maintenant qu'à appliquer les procédés généraux de l'élimination, ce qui, dans le cas de deux variables, ne présente pas de difficulté. Soit (r_0, φ_0) un point quelconque pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. Développant $\frac{\partial(G^2)}{\partial \varphi}$ en série partout convergente suivant les puissances de $r - r_0$ et de $\varphi - \varphi_0$, la condition $\frac{\partial(G^2)}{\partial \varphi} = 0$ prend la forme

$$(4^a) \quad \sum_{k,l} \gamma_{kl} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l = 0,$$

et le premier membre ne s'annule pas identiquement pour $r = r_0$, en vertu du lemme démontré au n° 2 (1).

Admettons, pour un moment, des valeurs complexes de $r - r_0$ et $\varphi - \varphi_0$. Alors, si $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ commence par des termes d'ordre p en r et φ , il existe exactement p développements de la forme

$$(5) \quad \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0 = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i,$$

t étant une puissance fractionnaire de $r - r_0$: $t = (r - r_0)^{\frac{1}{p}}$ (p entier positif) (2). L'ensemble des valeurs (r, φ) fournies par ces développements est identique à l'ensemble des racines (r, φ) de l'équation $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi} = 0$ dans un voisinage fini et déterminé du point (r_0, φ_0) .

Or, retournons au domaine réel. Comme le zéro (r_0, φ_0) ne peut être isolé, quelques-uns, du moins, des développements cités auront une projection dans le domaine réel, qui n'est autre chose qu'un élément de courbe algébroïde passant par le point (r_0, φ_0) .

De plus, comme G n'a que des zéros isolés, les zéros de $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ sont, dans un certain voisinage du point, identiques à ceux de $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$, donc :

Au voisinage de chaque point (r_0, φ_0) qui annule $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$ l'équation $\frac{\partial G}{\partial\varphi} = 0$ définit un nombre fini d'éléments algébroïdes réels passant par le point. On s'assure, du reste, aisément que chacun de ces éléments avec ses prolongements analytiques par le plan des z donne une courbe algébroïde entière.

Envisageons l'ensemble de tous ces éléments. Bornons-nous à ceux d'entre eux qui possèdent des points à l'intérieur ou sur la

(1) Le dernier raisonnement ne s'applique pas au point $r = 0$. Pour traiter ce point, on divisera d'abord $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ par une puissance convenablement choisie de r ; on sera ainsi ramené au cas général.

(2) Développements à la Puiseux. Comparer JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 342-350.

périphérie d'un cercle (R). Je dis que ces éléments avec leurs prolongements analytiques ne forment qu'un nombre fini de courbes (branches de courbes) algébroides.

En effet, supposons qu'il y en ait une infinité ayant des points communs avec l'intérieur ou la périphérie de (R). Alors il y a, dans (R) ou sur (R), au moins un point limite P tel que dans son voisinage pénètrent des courbes $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ en nombre infini. La continuité de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ exige alors que P soit lui-même un zéro de la fonction. Appliquant alors le théorème ci-dessus, on voit que l'hypothèse faite est absurde. Notre proposition sur les valeurs $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ est donc bien démontrée.

Nous désignerons dorénavant par *courbes* C les courbes algébroides entières $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Une courbe C ne coupe un cercle (r) qu'en un nombre fini de points. C'est ce qu'on démontre encore par la méthode du point limite. Mais la même méthode nous fournit encore le résultat bien plus précis :

Sur tous les cercles (r) intérieurs à (R) le nombre des points pour lesquels $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ est au plus égal à un nombre fini K qui ne dépend que de R.

Une dernière conclusion à tirer de la considération des courbes C est la suivante :

Tous les points $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ d'un cercle (r) dans un certain voisinage d'un cercle (r₀) sont situés sur des courbes C ayant des points communs avec (r₀).

3. Les mêmes résultats subsistent évidemment pour les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$; il y a même lieu de faire sur ces courbes une remarque complémentaire.

Les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ ($\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$) ne peuvent être fermées; ou

mieux : il ne peut exister, dans le plan des z , aucun domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ ($\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$).

En effet, comme $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$ satisfait partout à l'équation de Laplace et qu'elle est régulière dans tout domaine fini, elle serait identiquement nulle si elle s'annulait sur le contour.

Le résultat analogue sur les courbes C a une portée moins grande. Tout d'abord, en appliquant à $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$ les raisonnements ci-dessus, on voit qu'il ne peut pas exister de domaines finis, limités exclusivement par des arcs de courbes C , et tels qu'ils ne contiennent, ni dans leur intérieur, ni sur leurs contours, aucun zéro de G . De plus, il est évident que chaque zéro de G est nécessairement situé sur une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. D'où ce résultat :

S'il existe un domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes C et n'en contenant aucun dans son intérieur, il faut que l'un au moins de ces arcs contienne un zéro de G (c'est-à-dire de f).

L'exemple du n° 10 montrera du reste que cette circonstance peut bien se présenter.

6. Nous pouvons maintenant aborder notre problème principal, la recherche des plus grandes valeurs $M(r)$ de G sur les différents cercles (r) . Nous commencerons par une orientation rapide, puis nous approfondirons.

Prenons donc un cercle déterminé (r_0) ($r_0 < R$) et cherchons-en les points dans lesquels G prend la valeur $M(r_0)$. Je les appellerai les *points maxima* du cercle. Ces points sont certainement compris parmi les intersections du cercle avec les courbes C . Comme le nombre de ces intersections est $\leq K$, la détermination des points maxima n'offre pas de difficulté théorique. Il peut y en avoir un ou plusieurs.

Il s'agit maintenant de trouver les points maxima sur les cercles voisins de (r_0) .

Supposons d'abord qu'il n'y ait, sur (r_0) , qu'un seul point maximum et un seul élément C_1 des courbes C passant par ce

point. Alors les choses sont très simples. Comme, sur (r_0) , aux intersections avec les autres courbes C correspondent des valeurs de G plus petites que $M(r_0)$, de même, sur tous les cercles d'un certain voisinage de (r_0) , la courbe C_1 fournira les plus grandes valeurs de G , c'est-à-dire que, dans ce voisinage, les points maxima seront les points d'intersection des différents cercles avec la même courbe algébrique C_1 . Ce voisinage comprend des valeurs r et plus petites et plus grandes que r_0 .

J'appellerai *courbe maxima* tout arc de courbe formé par des points maxima. Donc, dans notre cas, il y a, dans le voisinage de r_0 , une seule courbe maxima, arc de la courbe algébrique C_1 .

Mais le cas général est plus compliqué. En effet, s'il y a sur r_0 plusieurs points maxima et plusieurs éléments C passant par eux, il faut traiter séparément les valeurs $r > r_0$ et $r < r_0$. Étudions d'abord le cas $r > r_0$. Envisageons tous les éléments de C passant par les points maxima de (r_0) et suivons-les dans la direction des r croissants. Les points maxima des cercles (r) ($r > r_0$) sont certainement, dans un certain voisinage de (r_0) , compris parmi les intersections de (r) avec ces éléments, d'après la remarque faite à la fin du n° 4. Donc, les courbes maxima seront, dans le voisinage de (r_0) , comprises parmi ces éléments : ce seront ceux qui fournissent sur chaque cercle (r) ($r > r_0$) assez voisin de (r_0) les plus grandes valeurs de G . Il peut y en avoir plusieurs.

Les mêmes raisonnements sont valables pour les valeurs $r < r_0$. *Mais les courbes maxima peuvent être différentes pour $r > r_0$ et pour $r < r_0$.*

C'est là un fait capital, par suite duquel la fonction $M(r)$ se comporte d'une façon complètement différente des deux côtés du point r_0 .

Je dirai que r_0 est un *point anguleux* de la fonction $M(r)$, si cette circonstance se présente, c'est-à-dire, *si les courbes maxima sont différentes pour $r > r_0$ et $r < r_0$.*

Il y aura, du reste, lieu de distinguer deux sortes de points anguleux :

1° *Points anguleux de la première sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés du cercle (r_0) sont différentes, mais elles

passent par les mêmes points maxima de (r_0) ⁽¹⁾. (Ce cas ne peut se présenter que lorsque plusieurs éléments C passent par un point maximum);

2° *Points anguleux de la deuxième sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés passent par des points maxima différents.

Nous reviendrons sur cette classification (n° 9).

Les courbes maxima sont donc des arcs de courbes C, coupés aux points anguleux.

Mais les raisonnements ci-dessus ne sont qu'approximatifs. Il faut les rendre concluants par une voie analytique, ce qui ne présente pas de difficulté.

7. A cet effet, nous allons calculer la fonction $M(r)$ au voisinage de r_0 , ce qui se fait par une élimination.

Nous écrirons les développements (5) de tous les éléments C passant par les points maxima de (r_0) . C'est un nombre fini ($\leq K$) de développements que nous désignerons par

$$D_1, D_2, \dots, D_q.$$

Nous aurons

$$(5a) \quad D_\lambda : \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0^{(\lambda)} = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i.$$

La lettre t désigne dans tous ces développements la même puissance fractionnaire de $r - r_0$.

Certains de ces développements pourront du reste n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$.

Nous avons, d'autre part, autour du point maximum $(r_0, \varphi_0^{(\lambda)})$:

$$(4b) \quad G^2(r, \varphi) = M^2(r_0) + \sum_{k,l} \delta_{kl}^{(\lambda)} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0^{(\lambda)})^l,$$

la somme s'annulant pour $r = r_0, \varphi = \varphi_0^{(\lambda)}$.

(1) Pour parler plus exactement : il y a au moins un couple de courbes maxima des deux côtés de (r_0) qui passent par le même point maximum de (r_0) .

Nous désignerons par $\bar{G}_\lambda(r)$ les valeurs de $G(r, \varphi)$ sur l'élément D_λ . Substituant (5^a) dans (4^b) et tenant compte de ce que $r - r_0$ est une puissance entière de t , nous trouvons

$$\bar{G}_\lambda^2(r) = M^2(r_0) + \sum_1^\infty B_i^{(\lambda)} t^i,$$

et, par suite, puisque $M(r_0)$ est différent de zéro :

$$(6) \quad \bar{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^\infty A_i^{(\lambda)} t^i,$$

tous ces développements étant valables à la fois dans un voisinage fini et déterminé de r_0 .

Les $\bar{G}_\lambda(r)$ sont donc des éléments algébroides en r . Certains peuvent n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$. Il peut aussi y en avoir plusieurs d'identiques : dans ce cas, nous n'en conserverons qu'un seul.

Distinguons maintenant les deux cas $r < r_0$ et $r > r_0$. Prenons d'abord $r > r_0$. Formons toutes les différences deux à deux des \bar{G}_λ réels pour $r > r_0$. Soit

$$\bar{G}_\lambda - \bar{G}_\mu = t^\epsilon \sum_0^\infty \bar{A}_i t^i \quad (\bar{A}_0 \neq 0)$$

une de ces différences. Elle a pour toutes les valeurs de $r (> r_0)$ dans le voisinage de r_0 un signe constant, celui de $\bar{A}_0 t^\epsilon$. Donc il y a un développement bien déterminé, soit \bar{G}_λ , qui, pour toutes les valeurs $r > r_0$ d'un voisinage fini, donne des valeurs de G supérieures (ou au moins égales) à celles fournies par les autres développements. On a alors dans tout ce voisinage

$$(6^a) \quad M(r) = \bar{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^\infty A_i^{(\lambda)} t^i \quad (r > r_0).$$

Le même raisonnement s'applique aux valeurs $r < r_0$, il y aura encore un développement maximum, soit \bar{G}_μ , mais il est évi-

dent qu'en général, \overline{G}_μ est différent de \overline{G}_λ . Donc

$$(6^b) \quad M(r) = \overline{G}_\mu(r) = M(r_0) + \sum_1^{\infty} A_i^{(\mu)} t^i \quad (r < r_0).$$

Si G_λ et G_μ diffèrent, r_0 est un point anguleux de $M(r)$.

Voici donc le résumé des résultats acquis :

De chaque côté d'un point quelconque r_0 , la fonction $M(r)$ admet un développement algébroïde. Ces développements sont valables dans un intervalle d'étendue finie. Si les développements des deux côtés sont identiques, nous avons un point ordinaire, sinon un point anguleux de $M(r)$.

8. *A l'intérieur d'un intervalle fini $(0 \dots R)$, il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux.*

En effet, s'il y en avait une infinité, ils auraient un point limite $\leq R$, ce qui est inadmissible, puisque, pour ce point, le théorème du numéro précédent serait en défaut.

Notre proposition générale, énoncée au n° 1, est donc bien établie.

Voici une autre forme du même résultat : *Les courbes maxima sont des arcs de courbes algébroïdes. Toute courbe C qui est maxima dans un élément l'est sur un arc de longueur finie. Pour $r \leq R$, cette longueur reste au-dessus d'une limite fixe, différente de zéro.*

9. Je ferai encore quelques remarques à l'égard des points anguleux. En les appelant ainsi, j'ai un peu généralisé l'acception ordinaire du mot. En effet, la définition ci-dessus du point anguleux n'implique pas qu'il y ait forcément discontinuité de la tangente.

Il y a même dans cet ordre d'idées une proposition spéciale sur les points anguleux de première sorte.

En un point anguleux de première sorte, la tangente est toujours continue.

C'est une conséquence immédiate d'une formule très simple relative à la dérivée $\frac{dM}{dr}$.

Soit $\frac{d\varphi}{dr}$ le coefficient angulaire de la courbe maxima au point r .

Nous supposons d'abord que $\frac{d\varphi}{dr}$ n'est pas infini. On a alors

$$(7) \quad \frac{dM}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r}.$$

Mais cette formule subsiste encore pour les points où le coefficient angulaire est infini [c'est-à-dire où la courbe maxima est tangente au cercle (r)]. Nous savons en effet, par suite du caractère algébrique des courbes C , que ces points sont isolés. Or la relation (7) étant vérifiée pour des points infiniment voisins du point isolé, l'est aussi pour le point même, parce que, sur une même courbe maxima, $\frac{dM}{dr}$ ne fait pas de sauts brusques.

La formule (7) est assez remarquable : on en conclut, entre autres, que la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est partout finie, ce qui ne paraît nullement évident *a priori* (1).

Pour démontrer notre proposition sur les points anguleux de première sorte, nous n'avons qu'à appliquer la formule (7) au point de rencontre (r_0, φ_0) des deux courbes maxima pour $r < r_0$ et $r > r_0$.

10. La conclusion à tirer de notre théorème général est que la fonction $M(r)$ est loin de se comporter d'une façon simple; ce sont surtout les points anguleux qui y introduisent une complication très sensible. Il m'a donc paru intéressant de vérifier sur un exemple que ces discontinuités que notre méthode de démonstration a fait prévoir se présentent bien en réalité. L'exemple le plus simple d'une courbe $M(r)$ composée de plusieurs arcs de courbes analytiques différentes est fourni par des polynômes du second degré (2).

(1) Voir aussi le théorème cité à la fin de ce travail (n° 11), qui assure la même propriété à la dérivée seconde $\frac{d^2 M}{dr^2}$.

(2) M. Ed. Landau a bien voulu me faire savoir que, dès 1904, il avait trouvé et donné dans ses cours l'exemple de la fonction

$$f(z) = 1 + z - z^2,$$

qui rentre dans notre catégorie.

Considérons d'abord une fonction linéaire $f(z) = z + \beta$. Il est évident que cette fonction prend son module maximum une seule fois sur chaque cercle ayant l'origine comme centre; la fonction $M(r)$ a la forme très simple

$$M(r) = r + |\beta|.$$

Mais passons aux polynômes du second degré. Ici, des circonstances très variées peuvent se présenter. Pour les étudier, je n'ai pas pu me servir des procédés éliminatoires directs qui conduisent à des calculs à peu près inextricables, mais j'ai dû recourir à des considérations géométriques.

Je désignerai par e_1, e_2 les deux racines du polynôme du second degré, de sorte que nous aurons

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta = (z - e_1)(z - e_2).$$

Nous marquerons dans le plan les deux points e_1 et e_2 et nous poserons

$$|z - e_1| = r_1, \quad |z - e_2| = r_2,$$

donc

$$G(r, \varphi) = r_1 r_2, \quad M(r) = \max(r_1 r_2) \quad \text{pour } |z| = r.$$

La fonction $M(r)$ est particulièrement simple, si e_1, e_2 sont des nombres complexes conjugués (et dans les cas qui se réduisent à celui-ci par une rotation du plan). On a alors évidemment

$$M(r) = r^2 + |\alpha| r + |\beta|.$$

Écartons ce cas-là et de même, pour un moment, le cas de valeurs e_1, e_2 réelles (et les cas réductibles à ceux-ci). Pour toutes les autres positions des points e_1, e_2 j'ai pu démontrer, par une voie un peu détournée, que la fonction $M(r)$ est partout algébrique et sans points anguleux, mais le calcul effectif de la fonction serait, probablement, assez long.

Le cas le plus intéressant est celui de valeurs e_1, e_2 réelles et de signes contraires; si e_1, e_2 ont le même signe, on a évidemment le même résultat que dans le cas de valeurs complexes conjuguées.

Soient donc e_1, e_2 deux points situés sur l'axe des x . Envisageons les courbes $r_1 r_2 = \text{const.}$ Ce sont des courbes de Cassini ayant les points e_1, e_2 pour foyers. Une telle courbe a, au plus,

quatre points réels communs avec un cercle (r) . Soit donc $M(r) = \alpha^2$ le maximum du module sur le cercle (r) . Ce cercle est alors renfermé tout entier à l'intérieur de la courbe $r_1 r_2 = \alpha^2$ et il a au moins un point commun avec elle. En ces points communs, il doit y avoir contact entre la courbe et le cercle. Nous avons donc deux cas à distinguer :

1° Le cercle (r) a un seul point de contact avec la courbe (α) (cercle simplement tangent). Pour des raisons de symétrie, ce point est situé sur l'axe des x .

2° Le cercle a deux points de contact avec la courbe (cercle doublement tangent). Les points de contact sont symétriques par rapport à l'axe des x .

Nous chercherons toutes les valeurs de r qui correspondent à des cercles doublement tangents.

L'équation d'une courbe de Cassini ayant les foyers e_1, e_2 est

$$(a) \quad [(x - e_1)^2 + y^2][(x - e_2)^2 + y^2] = \alpha^4.$$

Nous supposons, d'après ce que nous venons de remarquer, que e_1, e_2 sont de signe contraire, et en particulier $e_1 = |e_1|$, $e_2 = -|e_2|$; nous supposons en outre $e_1 \neq -e_2$, le cas $e_1 = -e_2$ étant un cas limite particulièrement simple ⁽²⁾. Pour fixer les idées, nous choisirons $e_1 + e_2 < 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Éliminant y entre (a) et l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nous trouvons l'équation en x

$$(b) \quad \begin{aligned} &(-2e_1x + e_1^2 + r^2)(-2e_2x + e_2^2 + r^2) = \alpha^4, \\ &4e_1e_2x^2 - 2(e_1 + e_2)(e_1e_2 + r^2)x + (e_1^2 + r^2)(e_2^2 + r^2) = \alpha^4. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait deux points de contact, il faut que cette équation ait une racine double. La condition est, tous calculs faits,

$$(c) \quad \alpha^4 = -\frac{(e_1 - e_2)^2}{4e_1e_2}(r^2 - e_1e_2)^2 = \frac{(e_1 - e_2)^2}{4|e_1e_2|}(r^2 - e_1e_2)^2,$$

⁽¹⁾ Parce que les deux points infinis du cercle sont des points doubles de la courbe de Cassini.

⁽²⁾ Voir à la fin de ce numéro.

et l'abscisse commune des points de contact est

$$(d) \quad x_t = \frac{1}{4} \frac{(e_1 + e_2)(e_1 e_2 + r^2)}{e_1 e_2}.$$

Il semble donc qu'à chaque cercle r corresponde une courbe (α) à contact double, α étant donné par la formule (c). Mais ces points de contact ne sont pas tous réels. En effet, substituant la valeur de x_t dans l'équation du cercle, on trouve pour l'ordonnée la valeur

$$(e) \quad y_t^2 = r^2 - \frac{1}{16} \frac{(e_1 + e_2)^2 (e_1 e_2 + r^2)^2}{e_1^2 e_2^2},$$

valeur évidemment négative pour les grandes et les petites valeurs de r . Pour présenter nettement les choses, éliminons r entre (d) et (e); nous trouverons la courbe formée par les points de contact. Un calcul facile nous donne

$$(f) \quad x_t^2 + y_t^2 = \frac{4 e_1 e_2}{e_1 + e_2} x_t - e_1 e_2.$$

C'est l'équation d'un cercle ayant le point

$$X = \frac{2 e_1 e_2}{e_1 + e_2}, \quad Y = 0$$

comme centre et comme rayon la longueur

$$\sqrt{|e_1 e_2|} \left| \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right|.$$

Le cercle coupe l'axe des x aux deux points

$$\begin{aligned} -r_1 &= (\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2}, \\ r_2 &= -(\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2} \end{aligned}$$

(les racines étant affectées du signe +); d'après nos hypothèses sur les valeurs e_1, e_2 , le premier point est situé à gauche, le second à droite de l'origine.

Donc, il y a contact double entre les cercles et les courbes de Cassini correspondantes pour les valeurs de r entre

$$r_1 = (\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|} \quad \text{et} \quad r_2 = (\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|}.$$

Les cercles sont d'ailleurs contenus dans l'intérieur des courbes tangentes. On s'en assure en remarquant que, pour tous les points du cercle (r) , on a l'équation analogue à (b)

$$(-2e_1x + e_1^2 + r^2)(-2e_2x + e_2^2 + r^2) = r_1^2 r_2^2.$$

Mais le premier membre a son maximum pour $x = x_t$.

Donc, pour $r_1 \leq r \leq r_2$, il y a deux courbes maxima, à savoir les demi-cercles supérieur et inférieur (f) . La fonction $M(r)$ est donnée par

$$(c') \quad M(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}} (r^2 + |e_1 e_2|) \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Son image géométrique est un arc de parabole.

Considérons maintenant les valeurs $r \leq r_1$ et $r \geq r_2$. Nous avons vu que pour ces valeurs il n'y a que des cercles simplement tangents. Les courbes maxima sont donc des segments de l'axe des x (voir p. 227, 1°). Je dis qu'avec nos hypothèses sur e_1, e_2 , la courbe maxima entre $r = 0$ et $r = r_1$ est le segment négatif entre $x = 0$ et $x = -r_1$; pour $r \geq r_2$, au contraire, c'est le segment positif à partir de $x = +r_2$.

La démonstration étant très simple, je ne l'indiquerai brièvement que pour $r < r_1$. Il faut s'assurer que la quantité

$$r_1 r_2 = \sqrt{[(x - e_1)^2 + y^2][(x - e_2)^2 + y^2]}$$

est plus grande pour $x = -r, y = 0$ que pour $x = +r, y = 0$ ($r \leq r_1$). Or

$$\text{pour } x = -r, y = 0 : (r_1 r_2)_- = |r + e_1| |r - e_2|,$$

$$\text{pour } x = +r, y = 0 : (r_1 r_2)_+ = |r - e_1| |r + e_2|.$$

La formule pour r_1 montre que, d'après nos hypothèses sur e_1, e_2 ,

$$r \leq r_1 = \frac{(\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|})^2}{|e_2| - |e_1|} \sqrt{|e_1 e_2|} = \frac{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|} < \sqrt{|e_1 e_2|} < |e_2|.$$

Donc

$$(r_1 r_2)_- = (|e_1| + r)(|e_2| - r),$$

tandis qu'il y a deux hypothèses admissibles sur $(r_1 r_2)_+$:

$$1^\circ \quad (r_1 r_2)_+ = (|e_1| - r)(|e_2| + r),$$

$$2^\circ \quad (r_1 r_2)_+ = (r - |e_1|)(r + |e_2|).$$

Avec la première hypothèse, l'inégalité cherchée

$$(r_1 r_2)_+ < (r_1 r_2)$$

est évidente; avec la seconde, on a

$$(r_1 r_2)_- - (r_1 r_2)_+ = 2 \left\{ |e_1 e_2| - r^2 \right\} \geq 2 \left\{ |e_1 e_2| - r_1^2 \right\} > 0,$$

ce qui prouve encore notre inégalité.

Nous résumerons, comme il suit, nos résultats :

1° *Les courbes maxima.* Entre $r = 0$ et $r = r_1$

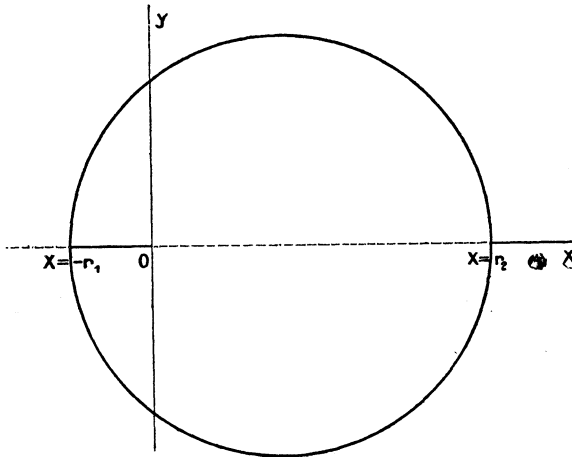
$$r_1 = \frac{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a une seule courbe maxima : le segment $(0 \dots -r_1)$ de l'axe des x ; entre r_1 et r_2

$$r_2 = \frac{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a deux courbes maxima : les deux demi-cercles (f); pour $r > r_2$

Fig. 1.



il y a encore une seule courbe maxima : le segment $(+r_2 \dots +\infty)$ de l'axe des x (*fig. 1*).

2° La fonction $M(r)$. Elle se compose de trois arcs différents :

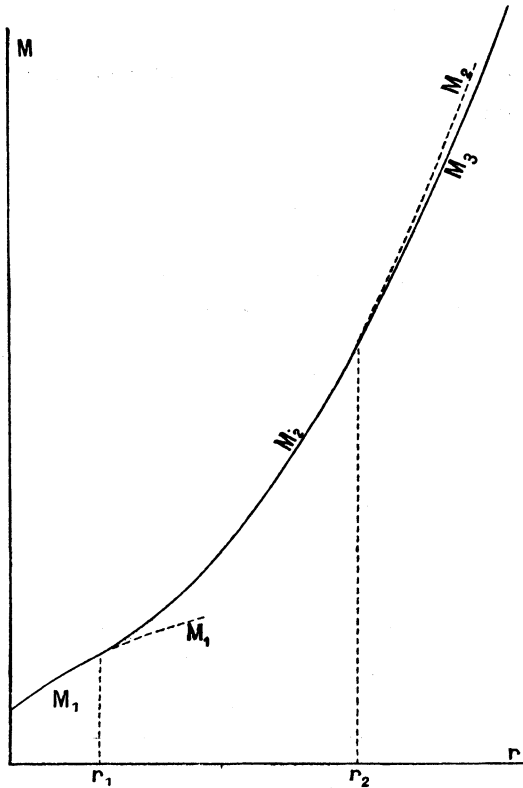
pour $0 \leq r \leq r_1$: $M_1(r) = |e_1 e_2| + \left\{ |e_2| - |e_1| \right\} r - r^2$;

pour $r_1 \leq r \leq r_2$: $M_2(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}} (r^2 + |e_1 e_2|)$;

pour $r > r_2$: $M_3(r) = r^2 + \left\{ |e_2| - |e_1| \right\} r - |e_1 e_2|$.

Ce sont trois arcs de paraboles (fig. 2).

Fig. 2.



Les points r_1 et r_2 sont les points anguleux de $M(r)$ ⁽¹⁾.

(¹) Ils sont de la *première* sorte. On vérifie facilement la continuité des tangentes. Il serait peut-être intéressant de se procurer aussi un exemple de points anguleux de la *deuxième* sorte. Je crois qu'on en trouvera parmi les polynômes du troisième degré.

Remarquons, pour finir, que le cas $e_2 = -e_1$ est un cas limite dégénéré : on a alors $r_1 = 0$, le cercle (f) dégénère dans l'axe des y , et

$$M(r) = r^2 + e^2 \quad (e = e_1 = -e_2).$$

Remarquons encore que l'axe des x , qui n'est courbe maxima que sur une partie de son étendue, est partout une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

11. Il est clair que les propriétés que nous venons de démontrer sur la fonction $M(r)$ sont bien loin de la caractériser complètement. Peut-on indiquer des conditions *suffisantes* simples pour qu'à une fonction $M(r)$ on puisse faire correspondre une fonction entière $f(z)$ telle que

$$M(r) = \max |f(z)| \quad \text{pour } |z| = r?$$

C'est une question très importante, mais qui ne paraît pas près d'être résolue. En attendant, une autre condition nécessaire a été trouvée par trois voies toutes différentes par M. Hadamard ⁽¹⁾, M. Faber ⁽²⁾ et moi-même ⁽³⁾. Nous avons démontré, en effet, que l'expression

$$\frac{d \log M}{d \log r} = \frac{r}{M} \frac{dM}{dr}$$

est toujours croissante. Il s'ensuit que, pour les fonctions entières non linéaires, la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est croissante à partir d'une certaine valeur de r , car pour toutes ces fonctions $\frac{r}{M}$ diminue si r va en augmentant à partir d'une certaine valeur ⁽⁴⁾.

Comme je ne connaissais pas le travail antérieur de M. Hadamard lors de la publication de mon Mémoire, je profite de l'occasion pour faire cette rectification bibliographique.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, 1896. M. Hadamard n'a pas publié sa démonstration, il a bien voulu me l'indiquer par écrit. Sa proposition a été reproduite par M. d'Adhémar dans sa rédaction des *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. Borel. Là encore, la démonstration manque, car le raisonnement ajouté par M. d'Adhémar ne porte pas sur la question.

⁽²⁾ *Math. Ann.*, t. LXIII, 1907.

⁽³⁾ *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, 1907.

⁽⁴⁾ Voir aussi n° 9, la note en bas de la page 225.