A GERMAIN DE ST.

Sur la courbure des surfaces de carène

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 37-38

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__37_1>

Sur la courbure des surfaces de carène; par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 20 janvier 1875)

Quand un plan P se déplace de manière à détacher d'une surface convexe S un segment U de volume constant V, le centre de gravité de U décrit une surface Σ que son rôle en hydrostatique a fait nommer surface de carène. Soient M, M' deux points de Σ correspondant à deux positions infiniment voisines P, P' du plan mobile, dont l'intersection est, on le sait, une droite HH' qui passe au centre de gravité O de la section C, déterminée par P dans Σ : le plan tangent à Σ en M est parallèle à P; j'ajoute que l'indicatrice au même point est homothétique à l'ellipse principale de la section C par rapport à son centre de gravité, et qu'en outre la courbure de la surface Σ varie en raison inverse des moments d'inertie de C par rapport aux droites qui passent en son centre de gravité.

Prenons pour axes des x et des y les axes de l'ellipse principale E de la section C, et pour axe des z une perpendiculaire aux deux premiers; appelons A l'aire de C, et posons, en étendant les intégrales à tout l'intérieur de cette section,

$$\int\int x^2 dxdy = Ab^2, \quad \int\int y^2 dxdy = Aa^2;$$

en sorte que l'équation de l'ellipse principale E puisse s'écrire

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

le moment d'inertie C par rapport à un diamètre de longueur $2r$ sera $A\frac{a^2b^2}{r^2}$.

Soient θ l'angle $< \pi$ de HH' avec OX, ε l'angle des plans P et P', et supposons P' au-dessous de P dans la région qui contient la partie positive de l'axe des x. Les différences entre les coordonnées de M' et celles de M, dx, dy, dz, sont données par le théorème des moments :

$$Vdx = \int\int \varepsilon(x \sin\theta - y \cos\theta) x dxdy = Ab^2\varepsilon \sin\theta,$$

$$\mathrm{V}dy = \int\int \varepsilon(x \sin\theta - y\cos\theta) y dx dy = -\mathrm{A}a^2\varepsilon \cos\theta,$$

$$\mathrm{V}dz = \int\int \frac{1}{2}\varepsilon^2(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 dx dy = \frac{1}{2}\mathrm{A}\varepsilon^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta).$$

La valeur $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2}\cot\theta$ prouve que la direction de l'élément MM′ est conjuguée de HH′ par rapport à E. Puisque dz est infiniment plus petit que dx et dy, il faut que le plan tangent à Σ en M soit parallèle à XOY ou P ; le rayon de courbure de la section normale qui contient MM′ a pour mesure

$$\rho = \frac{dx^2 + dy^2}{2dz} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} \frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} r^2,$$

r étant la longueur du demi-diamètre de E conjugué à HH′, c'est-à-dire parallèle à la tangente à MM′ ; or ρ varie comme le carré du demi-diamètre de l'indicatrice de Σ qui contient l'élément MM′ ; il faut donc que cette indicatrice soit homothétique à l'ellipse principale E.

En prenant pour S un cylindre et ne considérant que des sections C parallèles aux génératrices, on a un théorème de géométrie plane : *le rayon de courbure du lieu des centres de gravité des segments d'aire constante interceptés dans une surface convexe par une corde variable, est perpendiculaire en chaque point à la corde correspondante, et égal au cube de cette corde divisé par 24 fois l'aire du segment.*

Dans le cas général, la courbure de Σ est mesurée par la somme des inverses des rayons de courbure principaux

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \mathrm{V}\left(\frac{1}{\mathrm{A}a^2} + \frac{1}{\mathrm{A}b^2}\right) :$$

elle est proportionnelle à ce qu'on peut appeler la valeur moyenne des inverses des moments d'inertie de C par rapport aux diamètres de E.

On ne peut trouver des relations aussi simples entre E et la courbure de la surface enveloppe du plan P, parce que la position du point où P′ touche son enveloppe dépend non-seulement de la forme de la section C, mais aussi de la loi de variation du plan tangent à S sur le contour de C, et cette loi est tout à fait quelconque.