H VON KOCH

Remarques sur quelques séries de polynomes

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 269-274
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__269_1>

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES DE POLYNOMES;

Par M. Helge von Koch.

Désignant par x un point du plan de la variable complexe, on sait que l'équation

$$(1) \qquad |x^2 - 1| = 1$$

représente une lemniscate de Bernoulli, ayant pour pôles les points $x = -1$ et $x = +1$ et pour point double le point $x = 0$; ce dernier point divise la lemniscate en deux parties que nous désignerons par A et B et qui entourent respectivement les points $x = +1$ et $x = -1$.

Soit $f(x)$ une fonction analytique régulière à l'intérieur du contour A; par la substitution

$$z = 1 - x^2, \qquad x = \sqrt{1 - z} = 1 - \frac{1}{2} z + \ldots,$$

$f(x)$ deviendra une fonction de z régulière dans un certain voisinage de $z = 0$. Soit

$$(2) \qquad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

le développement taylorien de cette fonction. Quant x décrit le contour A, z décrit le cercle

$$|z| = 1,$$

ce qui, d'après des principes bien connus, signifie que la fonction est régulière dans ce cercle ou, en d'autres termes, que la série (2) converge pour $|z| < 1$. Il en résulte que la série

$$(3) \qquad c_0 + c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^2)^2 + \ldots$$

converge et représente $f(x)$ à l'intérieur de A.

Or la condition

$$|x^2 - 1| < 1$$

étant remplie aussi par les points intérieurs à B, on voit que la convergence de la série (3) s'étend à cette autre partie de la lemniscate considérée.

Comme la série (3) ne change pas de valeur si l'on change x en $-x$, il est clair que cette série ne peut pas, en général, représenter $f(x)$ à l'intérieur de B; pour cela il faudrait d'abord que $f(x)$ pût se prolonger analytiquement, et puis que la condition $f(x) = f(-x)$ fût vérifiée.

Ces remarques donnent donc un moyen très simple pour former une série de polynomes représentant différentes fonctions dans différentes portions du plan.

Prenant d'abord

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lfloor 2\nu}{(\lfloor \nu)^2} \frac{z^\nu}{2^{2\nu}},$$

on voit que la série

$$(4) \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lfloor 2\nu}{(\lfloor \nu)^2} \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^\nu$$

converge à l'intérieur de la lemniscate (1), mais a pour valeur $\frac{1}{x}$ à l'intérieur de A, $-\frac{1}{x}$ à l'intérieur de B (¹).

Comme autre exemple, considérons la fonction $\log x$; prenons-en la branche qui s'annule pour $x = 1$ et rendons-la uniforme par une coupure partant de l'origine et suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Par $\log x$ nous désignons donc, quel

(¹) Je dois à M. Borel la remarque que, dans le *Calcul différentiel* de J. Bertrand, se trouve, à titre d'exercice sur les séries, un développement analogue à (4), qui pourrait être employé pour le même objet; ce développement a ailleurs servi à M. Lebesgue dans l'étude d'une tout autre question (*Voir* Borel, *Leçons sur les variables réelles*, p. 60).

que soit x, la fonction uniforme ainsi définie. Comme on a

$$\log x = \log\sqrt{1-z} = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right),$$

on trouve que la série

$$(5) \qquad 1 - x^2 + \frac{(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{3} + \ldots$$

converge dans les deux parties de la lemniscate, mais représente

$$\begin{array}{lll} -2\log x & \text{à l'intérieur de A,} \\ -2\log x + 2\pi i & \quad » & \quad \text{B.} \end{array}$$

Comme on sait, Weierstrass (¹) a le premier signalé le fait important qu'une série peut représenter différentes fonctions dans différentes portions du plan; d'autres géomètres ont ensuite donné des exemples variés du même fait (²). Il nous semble que la série (5) en offre l'exemple le plus intuitif.

J'avais été conduit aux remarques qui précèdent par l'étude des séries de la forme

$$\sum_{\nu} P_\nu(x)\,[\varphi(x)]^\nu,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré donné n et P_ν des polynomes en x de degré au plus égal à $n-1$. Ces séries, qui convergent dans des domaines limités par des sortes de lemniscates généralisées, sont intéressantes à plus d'un point de vue et notamment pour la question du prolongement analytique et pour celle de l'interpolation (³). J'avais déjà commencé la rédaction de mon travail sur ce sujet, lorsque j'ai reçu un Mémoire de M. Alfred Kienast (⁴), où se trouvent la plupart des résultats que j'avais obtenus et que

(¹) *Monatsbericht der Ak. der Wiss. zu Berlin*, 1880. Dans le même Recueil pour 1881, Weierstrass a publié un exemple remarquable dû à M. J. Tannery. *Voir* aussi *Abhandlungen zur Functionenlehre*, p. 69, ou *Œuvres de Weierstrass*.

(²) *Voir* notamment E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 67. Paris, 1898.

(³) Dans une Conférence faite à Djursholm le 2 mars 1906, j'ai rendu compte de mes recherches sur ce sujet.

(⁴) *Uber die Darstellung der analytischen Functionen durch Reihen, die nach Potenzen eines Polynomes fortschreiten und Polynome eines niederen Grades zu Koeffizienten haben* (Inaugural-Dissertation, Zurich, 1906).

j'avais l'intention de publier. Dès lors il m'a paru superflu de poursuivre mon travail et je me suis borné, dans ce qui précède, à quelques exemples qui ne se trouvent pas dans le Mémoire de M. Kienast et qui, à cause de leur simplicité, me paraissent dignes d'être signalés.

Pour terminer je formerai, par un passage à la limite, une série de polynomes offrant une singularité de convergence bien plus profonde que les précédentes. Posons

$$P_n(x) = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-x^n)^\nu}{\nu},$$

n désignant un entier positif quelconque $\geqq 2$, et remarquons que le domaine de convergence de cette série :

$$|1-x^n|<1$$

est limité par la courbe dont l'équation, en coordonnées polaires, est la suivante :

$$r^n = 2\cos n\varphi;$$

cette courbe est composée de n branches, que nous pouvons désigner par A_0, A_1, ..., A_{n-1}, qui se rencontrent à l'origine et qui entourent respectivement les points

$$1,\quad \omega,\quad \omega^2,\quad \ldots,\quad \omega^{n-1}\qquad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right),$$

ainsi que les segments rectilignes joignant ces points à l'origine.

Pour une valeur réelle de x comprise entre 0 et 1 (0 exclus, 1 inclus), on a visiblement

$$P_n(x) = \log x.$$

Pour

$$x = re^{i\varphi}\qquad (0<r\leqq 1),$$

l'argument φ étant un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{n}$, on a $x^n = r^n$, d'où

$$P_n(x) = r,$$

ce que nous écrirons

$$P_n(x) = \log|x|.$$

Ces conclusions ayant lieu quel que soit n, on est amené, en prenant n successivement égal à

$$\underline{|2},\quad \underline{|3},\quad \underline{|4},\quad \ldots,$$

à la formule suivante :

$$\log|x| = \lim_{n=\infty} \mathrm{P}_{\underline{|n}}(x), \tag{6}$$

qui a lieu pour tout point x remplissant les deux conditions

$$\left\{\begin{aligned} & 0 < |x| \leqq 1, \\ & \frac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel}. \end{aligned}\right. \tag{6'}$$

Posons maintenant

$$\left\{\begin{aligned} & \mathrm{P}_n(x) = p_n(x) + \mathrm{R}_n(x), \\ & p_n(x) = -\frac{1}{n}\left(1 - x^n + \frac{(1-x^n)^2}{2} + \ldots + \frac{(1-x^n)^{\nu_n}}{\nu_n}\right) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et remarquons qu'on peut choisir ν_n tel que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} p_{\underline{|n}}(x) = \lim_{n=\infty} \mathrm{P}_{\underline{|n}}(x)$$

pour tout point x remplissant les conditions (6'). En effet, soit $x = re^{i\varphi}$ un tel point et choisissons n de la forme $\underline{|\nu}$ et suffisamment grand pour que l'on ait

$$x^n = r^n \qquad \text{et} \qquad |x| > \frac{1}{n};$$

on a alors, en posant pour abréger $\nu_n = m$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}_n(x) - p_n(x)| &= |\mathrm{R}_n(x)| \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{(1-x^n)^{m+1}}{m+1} + \frac{(1-x^n)^{m+2}}{m+2} + \ldots\right], \\ &< \frac{1}{n(m+1)}\,\frac{(1-x^n)^{m+1}}{x^n}, \\ &< \frac{n^n}{n(m+1)}\left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{m+1}, \end{aligned}$$

par où l'on voit qu'il suffit de prendre

$$\nu_n = m = n^n$$

pour avoir

$$|\mathrm{P}_n(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Prenant cette valeur de ν_n dans la définition (7) du polynome

$p_n(x)$, on peut donc remplacer la formule (6) par la suivante :

$$\log|x| = \lim_{n=\infty} p|_{\underline{n}}(x),$$

$$o < |x| \leqq 1, \qquad \frac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel.}$$

L'expression précédente pourrait être remplacée par la série de polynomes

$$p|_{\underline{2}}(x) + [p|_{\underline{3}}(x) - p|_{\underline{2}}(x)] + \ldots.$$

On a donc l'exemple d'une série de polynomes offrant les singularités suivantes :

La série converge sur tout rayon de longueur *un* issu de l'origine (o exclus) et formant avec l'axe réel un angle qui est en rapport rationnel avec 2π. Pour un point x d'un tel rayon, la série a la valeur réelle $\log|x|$; cette série représente donc successivement, dans un voisinage arbitrairement petit d'un point quelconque intérieur au cercle

$$|x| = 1,$$

une infinité de fonctions analytiques distinctes, savoir des fonctions de la forme

$$\log x + \varphi i,$$

φ étant en rapport rationnel à 2π.

FIN DU TOME XXXIV.

ERRATA.

Page 8, ligne 13, au lieu de « figure 4, » lire « figure 3 ».
Page 12, ligne 15, au lieu de « figure 3 », lire « figure 2 ».