BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet du frottement de glissement

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 108-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__108_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE AU SUJET DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

Par M. le Comte de Sparre.

Bien que j'aie déjà eu occasion d'aborder plusieurs fois ce sujet et, en dernier lieu, dans la Note sur le valet de menuisier, que j'ai publiée dernièrement dans le *Bulletin,* je crois qu'il ne sera pas sans intérêt d'y revenir de nouveau, d'autant plus que M. Painlevé, postérieurement à la rédaction de la Note dont je viens de parler, a fait, à l'Académie des Sciences, deux Communications sur ce sujet, le 21 août et le 20 octobre de l'année dernière.

Je rappelle que l'on a toujours admis que si deux corps, qui d'abord n'avaient aucune tendance à se déplacer l'un par rapport à l'autre, tendent ensuite à prendre un mouvement relatif, le coefficient de frottement croît de zéro à sa valeur f, relative au mouvement, à moins qu'il ne se trouve une valeur f' de ce coefficient plus petite que f, pour laquelle la force de frottement fait équilibre à la composante tangentielle des forces qui sollicitent le corps, auquel cas le glissement ne se produit pas.

M. Lecornu admet, d'une façon semblable, que lorsque deux corps en mouvement, l'un par rapport à l'autre, sont mis en contact, le coefficient de frottement croît très rapidement de zéro à sa valeur f pour le mouvement, à moins qu'il ne se trouve une valeur $f' < f$ qui rende les réactions infinies, auquel cas il se produit une percussion.

M. Painlevé n'admet pas cette manière de voir et il dit, dans sa Communication du 20 octobre : « L'assimilation aux lois du frottement au repos n'est pas sérieuse et l'hypothèse, d'après laquelle $\frac{F}{N}$ (1) partirait d'une valeur supérieure à f me paraît aussi vraisemblable que l'hypothèse d'après laquelle $\frac{F}{N}$ part de zéro. »

Je crois que M. Painlevé n'a pu formuler cette opinion que parce qu'il n'a pas tenu suffisamment compte de la cause à laquelle on attribue le frottement.

Pour le faire voir, je citerai un passage du *Traité de Mécanique générale* de Resal (2) : « Il résulte de la déformation des corps en contact que la résultante des actions mutuelles, de la part de l'un sur l'autre, n'est pas normale à leur surface, ou qu'elle est la résultante d'une composante normale et d'une composante tangentielle. »

Cette citation montre que, à l'époque où Resal écrivit ces lignes, on attribuait la force de frottement F à la déformation des corps en contact.

Cette force de frottement ne se manifestera par suite que lorsque la déformation se sera déjà produite. Il y aura donc une première période, au moment où les deux corps sont mis en contact, pendant laquelle leur compression réciproque produira la déformation des parties en contact, période pendant laquelle la force de frottement, d'abord nulle, tant qu'il n'y a pas de déformation appréciable, reste plus petite qu'elle ne le sera lorsque la déformation aura acquis sa valeur définitive.

En un mot, l'hypothèse de M. Lecornu, que le coefficient de frottement part de zéro lorsque deux corps en mouvement l'un par rapport à l'autre sont mis en contact, revient simplement à admettre que l'effet ne peut précéder la cause, ce qui paraît assez rationnel.

On doit remarquer aussi que, pour la même raison, si à un moment donné la composante normale de la pression mutuelle de deux corps subit une augmentation brusque, le coefficient de

(1) F désignant la composante tangentielle et N la composante normale de la réaction.

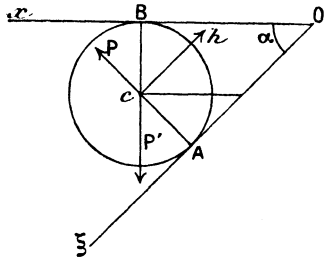
(2) Tome II, p. 2 (publié en 1874).

frottement commencera par décroître d'une façon plus ou moins considérable, puisque, dans le rapport $\frac{F}{N}$, la composante normale N a augmenté, tandis que la force de frottement F, résultat de la déformation mutuelle des deux corps, ne prendra son augmentation correspondante que lorsque l'accroissement de déformation (qui ne suit pas d'une façon instantanée l'augmentation de N) se sera lui-même produit.

Il résulte aussi de là que, si deux corps ont un simple contact géométrique, la force de frottement est nulle, puisqu'il n'y a aucune déformation des parties en contact; c'est là d'ailleurs un fait qui a toujours été admis dans les questions de frottement.

Ceci dit, je reviens aux exemples donnés par M. Painlevé dans ses dernières Communications. Soit d'abord l'exemple de M. Chaumat cité dans la Communication du 21 août, qui a trait à l'indétermination. Une roue homogène pesante glisse avec frottement (dans un plan vertical) sur une droite fixe horizontale Ox et glisse sans frottement sur une deuxième droite descendante $O\xi$, elle peut se soulever au-dessus de $O\xi$ et descendre au-dessous de Ox. Soient f le coefficient de frottement de la roue sur Ox, α l'angle $xO\xi$, r le rayon de la roue; nous supposons $\tang\alpha < f$.

Fig. 1.



On peut supposer d'abord que, la roue reposant sur $O\xi$, on l'amène à avoir en B avec Ox un simple contact géométrique; dans ce cas, si l'on abandonne ensuite la roue à elle-même, en lui appliquant un couple N de sens $xO\xi$, le contact en B étant un simple contact géométrique, il n'y a pas de frottement en B à l'instant initial et le mouvement se fait, par suite, comme si la droite Ox n'existait pas, puisque le déplacement subséquent éloigne la roue de Ox.

Il est à remarquer, d'ailleurs, que l'on arrive absolument au même résultat et sans la moindre ambiguïté également, si l'on suppose qu'on ait produit un serrage préalable de la roue entre Ox et $O\xi$, au moyen d'une force h appliquée au centre c de la roue et faisant un angle λ avec l'horizon.

Supposons que, après avoir produit le serrage au moyen de la force h, on applique le couple N en maintenant la force h.

Soient P la réaction de $O\xi$ en A, P′ la composante normale de la réaction de Ox en B, la composante tangentielle étant $P'f$, si le mouvement se produit et $P'f'$ avec $f' < f$ si le mouvement ne se produit pas.

Il est facile de voir que c'est toujours ce dernier cas qui aura lieu; en effet, pour qu'il en soit ainsi, on a les conditions

$$P \sin\alpha - P'f' - h\cos\lambda = 0 \quad (^1),$$
$$mg + P' - P\cos\alpha - h\sin\lambda = 0,$$
$$P'f'r - N = 0,$$
$$f' < f.$$

On tire de là

$$(1) \qquad P = \frac{h(\cos\lambda + f'\sin\lambda) - mgf'}{\cos\alpha(\operatorname{tang}\alpha - f')},$$

$$(2) \qquad P' = \frac{h\dfrac{\cos(\lambda-\alpha)}{\cos\alpha} - mg\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha - f'},$$

$$(3) \qquad f' = \frac{\dfrac{N}{r}\operatorname{tang}\alpha}{\dfrac{N}{r} + h\dfrac{\cos(\lambda-\alpha)}{\cos\alpha} - mg\operatorname{tang}\alpha},$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\alpha - f' = \frac{h\dfrac{\cos(\lambda-\alpha)}{\cos\alpha} - mg\operatorname{tang}\alpha}{\dfrac{N}{r} + h\dfrac{\cos(\lambda-\alpha)}{\cos\alpha} - mg\operatorname{tang}\alpha}\operatorname{tang}\alpha.$$

D'ailleurs, puisque nous supposons qu'il y a serrage initial (avant qu'on ait appliqué le couple N), P′ doit être positif pour $f' = 0$, ce qui exige

$$(5) \qquad h\frac{\cos(\lambda-\alpha)}{\cos\alpha} - mg\operatorname{tang}\alpha > 0$$

---

(1) m étant la masse de la roue et r son rayon.

et, cette condition étant remplie (4), fait voir que l'on a

$$f' < \operatorname{tang}\alpha < f,$$

le mouvement ne se produit donc pas, quelque grand que soit N.

De plus, la condition (5) peut s'écrire

$$h\cos\lambda - (mg - h\sin\lambda)\operatorname{tang}\alpha > 0$$

et, comme

$$f' < \operatorname{tang}\alpha,$$

on en conclut

$$h\cos\lambda - (mg - h\sin\lambda)f' > 0,$$

ce qui fait voir que P est toujours positif.

Si maintenant on fait décroître h, P′ décroîtra et il deviendra nul pour la valeur

$$h = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\lambda - \alpha)},$$

valeur pour laquelle P est encore positif; car on a, pour cette valeur,

$$h(\cos\lambda + f'\sin\lambda) - mgf' = \frac{mg\cos\lambda\cos\alpha}{\cos(\lambda - \alpha)}(\operatorname{tang}\alpha - f') > 0.$$

Donc, à ce moment, la pression en B deviendra nulle et, par suite, le frottement disparaîtra.

Le mouvement se fera donc à partir de cet instant, comme si Ox n'existait pas; c'est, en particulier, ce qui arrivera lorsque h devenant nul on sera ramené au problème de M. Chaumat.

On voit que, même avec un serrage initial, aussi bien que lorsqu'il n'y en a pas, la théorie classique du frottement permet de résoudre le problème sans aucune ambiguïté et sans qu'il soit nécessaire d'ajouter quoi que ce soit à cette théorie.

Considérons maintenant l'autre problème envisagé par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août :

Une tige rigide AB a son extrémité qui glisse avec frottement (dans un plan vertical) sur une droite fixe Ox, en supposant le point A compris entre deux lignes infiniment rapprochées Ox et O_1x_1, de façon que, lorsqu'il touche l'une de ces lignes, il ne touche pas l'autre, mais en est infiniment rapproché.

Je suppose, de plus, que les forces se réduisent à la pesanteur

et à deux forces horizontales : l'une X appliquée au centre de gravité G et l'autre h appliquée en A.

Soient m la masse de la tige, mk^2 son moment d'inertie par rapport au centre de gravité, l la distance AG, θ l'angle de AB avec Ox, R_x et R_y les composantes de la réaction en A. Les équations du mouvement par rapport au centre de gravité donneront, en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées de ce point,

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = R_x + h + X, \\ m\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = R_y + mg, \\ mk^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = l[(R_x + h)\sin\theta - R_y\cos\theta]; \end{cases}$$

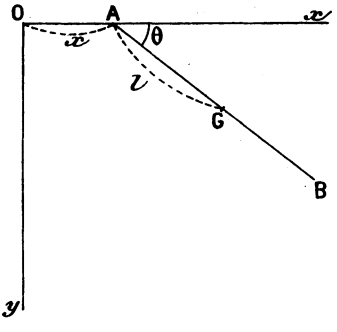
d'ailleurs, comme

$$x_1 = x + l\cos\theta, \qquad y_1 = l\sin\theta,$$

les deux premières équations précédentes deviennent [1]

$$(2)\qquad \begin{cases} x'' - l\theta''\sin\theta - l\theta'^2\cos\theta = \dfrac{R_x}{m} + \dfrac{h+X}{m}, \\ l\theta''\cos\theta - l\theta'^2\sin\theta = \dfrac{R_y}{m} + g. \end{cases}$$

Fig. 2.



Si alors on remplace dans la dernière des équations (1) R_x et R_y par leur valeur déduite de (2), on aura

$$(3)\qquad \frac{k^2}{l}\theta'' = x''\sin\theta - l\theta'' + g\cos\theta - \frac{X}{m}\sin\theta.$$

---

[1] En écrivant, pour simplifier l'écriture, x'', θ', θ'' à la place de $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Posons maintenant

$$(4) \qquad 2\mu = \frac{k^2 + l^2}{l^2} \quad (^1),$$

on aura

$$(5) \qquad 2\mu l\theta'' = x'' \sin\theta + g\cos\theta - \frac{X}{m}\sin\theta.$$

Si l'on remplace alors θ'' par sa valeur déduite de (5), dans les équations (2), nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} \left(x'' - \dfrac{X}{m}\right)(2\mu - \sin^2\theta) - g\sin\theta\cos\theta - 2\mu l\theta'^2\cos\theta = \dfrac{2\mu R_x}{m} + 2\mu\dfrac{h}{m}, \\ \left(x'' - \dfrac{X}{m}\right)\cos\theta\sin\theta + g\cos^2\theta - 2\mu l\theta'^2\sin\theta = \dfrac{2\mu R_y}{m} + 2\mu g. \end{cases}$$

Si l'on pose alors

$$(7) \qquad R_x = -\varepsilon f' R_y.$$

on déduira des équations (6)

$$(8) \quad \begin{cases} x'' = \dfrac{X}{m} + \dfrac{2\dfrac{\mu h}{m} + g[\sin\theta\cos\theta + \varepsilon f'(2\mu - \cos^2\theta)] + 2\mu l\theta'^2(\cos\theta + \varepsilon f'\sin\theta)}{2\mu - \sin^2\theta + \varepsilon f'\sin\theta\cos\theta}, \\ \dfrac{R_y}{m} = \dfrac{\dfrac{h}{m}\sin\theta\cos\theta - (2\mu - 1)(g + l\theta'^2\sin\theta)}{2\mu - \sin^2\theta + \varepsilon f'\sin\theta\cos\theta}. \end{cases}$$

Le signe de ε devant être choisi de façon que

$$(9) \qquad \varepsilon x' R_y > 0,$$

condition qui, si $x' = 0$, doit être remplacée par la suivante

$$(9') \qquad \varepsilon x'' R_y > 0.$$

Si l'on fait

$$X = 0, \qquad \mu = 1, \qquad 2l = r,$$

on retombe sur le problème que j'avais examiné dans ma Communication du 31 juillet, et si l'on fait, au lieu de cela, $h = 0$ sur

---

(1) Comme $k^2 \leqq l^2$, on aura

$$\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq 1.$$

celui envisagé par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août. On voit que ces problèmes sont complètement différents et que l'on ne saurait, comme le fait M. Painlevé, comparer leurs discussions, d'autant plus que les conclusions en sont, dans certains cas, absolument contradictoires. Ainsi, dans le problème de M. Painlevé, il peut y avoir, comme nous le verrons, arc-boutement, pour le mouvement à partir du repos, tandis que ce cas ne peut jamais se présenter pour le problème que j'ai considéré (¹).

Pour en revenir au problème envisagé par M. Painlevé, dans sa Communication du 21 août, il insiste sur le cas où le système part du repos.

Nous supposons toujours

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad f > \frac{2\mu - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Puisque le système part du repos, f' croît à partir de zéro. Or, pour $f' = 0$, les formules (8), où l'on doit faire $h = 0$, donnent, si $X > 0$, $x'' > 0$, $R_y < 0$ et l'on doit prendre $\varepsilon = -1$, mais alors x'' devient nul pour

$$(10) \qquad f' = \frac{\frac{X}{m}(2\mu - \sin^2\theta) + g\sin\theta\cos\theta}{\frac{X}{m}\sin\theta\cos\theta + g(2\mu - \cos^2\theta)} < \frac{2\mu - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} < f \quad (^2);$$

on voit donc que, quelque grand que soit X, du moment qu'il est positif, il y a *un seul mouvement* possible, celui où A est fixe. Dans ce cas, d'ailleurs, $R_y < 0$ et le point A presse sur le guide inférieur (³).

(¹) M. Painlevé n'avait donc pas besoin de dire que je me trompais si je croyais avoir ajouté quoi que ce soit à la discussion d'un problème *que je n'ai pas traité*.

(²) On a, en effet,

$$\frac{\frac{X}{m}(2\mu - \sin^2\theta) + g\sin\theta\cos\theta}{\frac{X}{m}\sin\theta\cos\theta + g(2\mu - \cos^2\theta)} - \frac{2\mu - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= -\frac{2\mu g(2\mu - 1)}{\sin\theta\cos\theta\left[\frac{X}{m}\sin\theta\cos\theta + g(2\mu - \cos^2\theta)\right]}.$$

(³) On voit que le seul mouvement acceptable est différent des trois indiqués comme possibles par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août.

Ce qui précède fait d'ailleurs voir, comme je l'ai dit, que le problème de M. Painlevé, où $h = 0$, est absolument différent de celui que j'avais examiné dans ma Communication du 31 juillet, puisque dans le mien il n'y avait jamais arc-boutement et que, dans celui de M. Painlevé, il y a arc-boutement dès que $X > 0$.

Supposons maintenant X négatif et posons

$$X = -X_1.$$

nous aurons, en prenant toujours

$$h = \theta''_0 = 0,$$

$$x'' = -\frac{X_1}{m} + g\frac{\sin\theta\cos\theta + \varepsilon f'(2\mu - \cos^2\theta)}{2\mu - \sin^2\theta + \varepsilon f'\sin\theta\cos\theta},$$

$$\frac{R_y}{m} = -g\frac{2\mu - 1}{2\mu - \sin^2\theta + \varepsilon f'\sin\theta\cos\theta}.$$

On est alors conduit à distinguer deux cas :

1° $$\frac{X_1}{mg} = \left|\frac{X}{mg}\right| < \frac{\sin\theta\cos\theta}{2\mu - \sin^2\theta}.$$

Dans ce cas, pour $f' = 0$, on a

$$x'' > 0, \qquad R_y < 0$$

et il faut prendre

$$\varepsilon = -1,$$

alors x'' deviendra nul pour

$$f' = \frac{g\sin\theta\cos\theta - \frac{X_1}{m}(2\mu - \sin^2\theta)}{g(2\mu - \cos^2\theta) - \frac{X_1}{m}\sin\theta\cos\theta} < f.$$

Donc, dans ce cas, il y a un seul mouvement possible, celui où A reste fixe et presse sur le guide inférieur [1],

2° $$\frac{X_1}{mg} = \left|\frac{X}{mg}\right| > \frac{\sin\theta\cos\theta}{2\mu - \sin^2\theta}.$$

---

[1] On a, en effet,

$$R_y < 0,$$

car,

$$2\mu - \sin^2\theta - f'\sin\theta\cos\theta = \frac{2\mu g(2\mu - 1)}{g(2\mu - \cos^2\theta) - \frac{X_1}{m}\sin\theta\cos\theta} > 0,$$

puisque

$$g(2\mu - \cos^2\theta) - \frac{X_1}{m}\sin\theta\cos\theta > g\frac{2\mu(2\mu - 1)}{2\mu - \sin^2\theta} > 0.$$

Dans ce cas, pour $f' = 0$, on a

$$x'' < 0, \qquad R_y < 0,$$

il faut donc prendre

$$\varepsilon = +1.$$

Lorsque f' croîtra ensuite de 0 à f, R_y conserve le signe — puisque $\varepsilon = +1$, et le point A appuie toujours sur le guide inférieur. Ce cas se subdivisera toutefois en deux :

I. (11) $$\frac{\sin\theta\cos\theta}{2\mu - \sin^2\theta} < \frac{X_1}{mg} < \frac{\sin\theta\cos\theta + f(2\mu - \cos^2\theta)}{2\mu - \sin^2\theta + f\sin\theta\cos\theta},$$

dans ce cas x'' devient nul pour la valeur

$$f' = \frac{\frac{X_1}{m}(2\mu - \sin^2\theta) - g\sin\theta\cos\theta}{g(2\mu - \cos^2\theta) - \frac{X_1}{m}\sin\theta\cos\theta} < f \quad (^1);$$

donc dans ce cas le point A reste fixe.

II. $$\frac{X_1}{mg} > \frac{\sin\theta\cos\theta + f(2\mu - \cos^2\theta)}{2\mu - \sin^2\theta + f\sin\theta\cos\theta},$$

dans ce cas x'' est encore négatif pour $f' = f$ et, par suite, le glissement se fait dans le sens négatif, le point A appuyant sur le guide inférieur.

On voit que la théorie classique du frottement permet de résoudre ce problème dans tous les cas sans aucune ambiguïté, et en appliquant cette théorie ainsi qu'on l'a toujours fait.

Il résulte toutefois de la discussion qui précède que les conclusions de la discussion du problème de M. Painlevé donné dans sa Communication du 21 août (2) *sont fausses*, puisque dans le cas sur lequel il appelle l'attention :

$$x'_0 = \theta'_0 = 0, \qquad X > \frac{f(2\mu - \cos^2\theta) - \sin\theta\cos\theta}{f\sin\theta\cos\theta - 2\mu + \sin^2\theta},$$

---

(1) On a d'ailleurs en vertu de (11)

$$\frac{X_1}{mg} < \frac{2\mu - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

(2) *Comptes rendus*, p. 404.

il n'y a qu'un seul mouvement possible et qui est différent des trois indiqués comme possibles par M. Painlevé.

Considérons maintenant le problème de M. Chaumat conduisant, suivant M. Painlevé, à une impossibilité.

Soient Ox et Oy deux demi-droites fixes d'un plan vertical, la première horizontale, l'autre oblique, dirigée au-dessus de Ox et faisant avec Ox un angle aigu α. Une roue homogène pesante, de masse m, située dans l'angle xOy, glisse avec frottement sur la droite Ox, au-dessus de laquelle elle peut se soulever, et sans frottement le long de la droite Oy, dont elle peut s'écarter dans le sens Ox. La roue est abandonnée à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale de rotation ω_0, de sens xOy, son centre étant immobile.

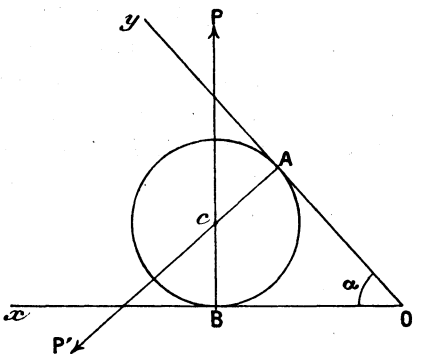
M. Painlevé suppose les conditions initiales réalisées de la façon suivante : la roue est maintenue en contact géométrique avec Ox et Oy par une force verticale $h = mg$ appliquée en son centre qu'on fait ensuite tendre vers zéro d'une façon aussi lente que l'on voudra.

On suppose

$$f > \operatorname{tang} \alpha.$$

Soit P la composante normale de la réaction de Ox, P′ la réaction normale de Oy.

Fig. 3.



Tant que l'on a $h = mg$, la roue ne frottant pas sur Oy et le contact en B avec Ox étant un simple contact géométrique, il n'y a pas de frottement et la rotation de la roue se continue indéfini-

ment; mais, dès que $h < mg$, quelque faible que soit la différence et dès que la roue sera en prise avec Ox, le coefficient de frottement croîtra, non de zéro à f, mais de zéro à

$$f' = \tang \alpha,$$

valeur pour laquelle P deviendra infini et produira par suite une percussion qui arrêtera la roue. On a, en effet, en négligeant le déplacement du centre de la roue,

$$P' \sin \alpha - Pf' = 0,$$
$$P + h - P' \cos \alpha - mg = 0,$$

d'où

$$P = \frac{mg - h}{1 - f' \cot \alpha},$$

et P et par suite aussi Pf' deviennent infinis pour $f' = \tang \alpha$.

Il n'y a d'ailleurs là rien que d'absolument rationnel, car, dès que le frottement entre en jeu et si faible que soit la pression verticale de la roue sur Ox (du moment qu'elle est suffisante pour mettre la roue en prise avec Ox), l'adhérence tend à entraîner la roue dans le sens des x négatifs et celle-ci venant se coincer entre les deux droites Oy et Ox les pressions de ces deux droites croissent au delà de toutes limites si l'on suppose la roue et les droites incompressibles et la percussion Pf où P est infinie arrête la roue.

On doit remarquer que la lenteur plus ou moins grande avec laquelle on fait décroître h à partir de mg ne change absolument rien au résultat final, et ne fait pas que le phénomène ne se passe pas toujours dans un temps très court. (Nous calculerons plus loin ce temps en tenant compte de la compressibilité de la roue et constaterons qu'il est toujours très petit.)

La percussion se produit dès que, la roue étant en prise avec Ox, le frottement entre en jeu, car le coincement de la roue entre Ox et Oy fait croître P et P' au delà de toutes limites et la valeur plus ou moins grande de la force $mg - h$ est alors absolument négligeable devant P.

Il y a là un phénomène semblable à celui qui se produirait si dans un encliquetage Dobo [1] on soulevait très légèrement au

---

[1] *Voir*, au sujet de la théorie de cet encliquetage, le *Traité de Mécanique* de Bour.

moyen de fils les ailes articulées, de façon qu'elles ne puissent être en contact avec la roue folle, celle-ci pourrait alors tourner dans les deux sens sans entraîner l'arbre ; mais, si on relâche les fils, dès que les ailes seront en prise avec la circonférence de la roue, celle-ci entraînera l'arbre, ou s'arrêtera subitement si celui-ci est fixe. Il est bien certain que la manière plus ou moins lente avec laquelle on lâchera les fils n'aura pas d'influence appréciable sur le phénomène : dès que les ailes sont en prise avec la roue, celle-ci devient solidaire de l'arbre.

Je crois inutile de revenir sur le second problème, pour le cas de l'impossibilité, car je devrais reproduire, à peu de chose près, ce que j'ai dit dans ma Communication du 31 juillet, mais il ne sera peut-être pas inutile de répondre à certaines objections pour ce dernier problème, comme pour celui de M. Chaumat que nous venons d'examiner.

Il est certain que dans la nature il n'y a pas de forces infinies et par suite pas de percussions, mais il ne faut pas oublier que ce que l'on demande à la Mécanique appliquée, dans le domaine de laquelle se trouve la théorie du frottement, c'est, non de nous donner la représentation rigoureuse des phénomènes, mais bien de nous en fournir une image assez approchée pour que nous puissions nous en servir pour prévoir les résultats finaux.

Or, s'il n'y a pas de forces infinies, il peut dans certains cas en intervenir d'assez grandes et dont la durée d'action est assez faible, pour que les résultats finaux provenant de leur intervention soient dans les limites d'approximation dont nous avons besoin, les mêmes que si on les remplaçait par des percussions.

Dans le cas qui nous occupe, ni la réaction, ni la force de frottement ne deviennent infinies, mais elles deviennent, pendant une certaine période très courte, assez grandes pour que, si l'on n'a en vue que ce qui se passe après cette période, on puisse les remplacer par des percussions.

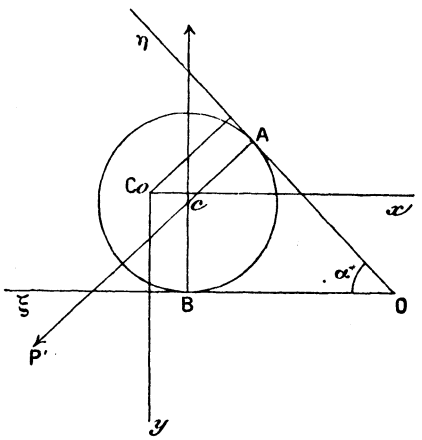
Il est bien certain d'ailleurs que l'introduction d'une percussion produit une discontinuité dans la suite des phénomènes, mais cette discontinuité n'existe pas réellement, c'est nous qui l'introduisons pour la facilité de nos calculs.

Il arrive d'ailleurs aussi que nous introduisons nous-mêmes dans certains cas des percussions dans nos problèmes, sans y

faire attention, c'est lorsqu'il s'agit de systèmes à liaisons pour lesquels l'hypothèse de la rigidité absolue que l'on suppose à ces liaisons exige que l'on suppose également infinies les pressions ou tensions qu'elles supportent, et c'est précisément ce qui a lieu dans les deux problèmes que M. Painlevé considère dans sa Communication du 2 octobre.

Pour le faire voir nous allons reprendre ces deux problèmes en introduisant les forces de liaisons, ce qui nous ramènera d'ailleurs à la seconde explication donnée par M. Lecornu dans sa Communication du 6 mars. Prenons d'abord le problème de M. Chaumat que nous venons d'examiner.

Fig. 4



Nous supposons que la roue est d'abord maintenue en contact géométrique avec $O\xi$ et $O\eta$ par une force verticale $mh = mg$ (¹) qu'on fait ensuite tendre vers zéro. Nous rapportons le mouvement à un système d'axes rectangulaires C_0xy passant par la position initiale du centre de la roue; lorsque le centre de la roue sera venu en C, par suite du coincement de cette roue entre $O\xi$ et $O\eta$, elle se sera rapprochée de $O\xi$ d'une quantité y et de $O\eta$ d'une quantité $x \sin\alpha - y \cos\alpha$; la composante normale P de la réaction de $O\xi$ sur la roue est une fonction de y et la pression P′ de $O\eta$ une

(¹) Je désigne cette force ici par mh au lieu de h pour simplifier l'écriture.

fonction de $x \sin\alpha - y \cos\alpha$; on peut même, tout au moins dans une première approximation, supposer P et P′ proportionnels à ces quantités. On aura alors

$$P = m\mu^2 y,$$
$$P' = m\mu^2(x \sin\alpha - y \cos\alpha) \quad (^1).$$

On aura alors pour les équations du mouvement de la roue

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Pf - P' \sin\alpha,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - mh + P' \cos\alpha - P,$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = - Pf(R - y).$$

En remplaçant P et P′ par leurs valeurs les deux premières deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu^2 fy - \mu^2(x \sin\alpha - y \cos\alpha) \sin\alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - h + \mu^2(x \sin\alpha - y \cos\alpha) \cos\alpha - \mu^2 y.$$

Multiplions la première par le facteur λ et ajoutons-la à la seconde; nous aurons

$$\frac{d^2(\lambda x + y)}{dt^2}$$
$$= g - h + \mu^2(\sin\alpha \cos\alpha - \lambda \sin^2\alpha)x + \mu^2(\lambda f + \lambda \sin\alpha \cos\alpha - 1 - \cos^2\alpha)y.$$

Nous poserons alors

$$\frac{\sin\alpha \cos\alpha - \lambda \sin^2\alpha}{\lambda} = \frac{\lambda f + \lambda \sin\alpha \cos\alpha - 1 - \cos^2\alpha}{1} = k,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda(\sin^2\alpha + k) - \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$
$$\lambda(f + \sin\alpha \cos\alpha) - 1 - k - \cos^2\alpha = 0.$$

---

(1) On aurait pu, si l'on avait voulu tenir compte non seulement de la compression de la roue mais aussi de celle des deux droites $O\xi$ et $O\eta$, prendre pour les deux coefficients de proportionnalité des valeurs différentes, si l'élasticité des deux droites n'était pas la même, mais cela changerait peu de chose.

On a donc pour déterminer k l'équation

$$(\sin^2\alpha + k)(1 + k + \cos^2\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha(f + \sin\alpha\cos\alpha) = 0,$$

où

$$k^2 + 2k + \sin^2\alpha - f\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

ou

$$k^2 + 2k - \sin\alpha\cos\alpha(f - \operatorname{tang}\alpha) = 0,$$

puisque nous supposons $f > \operatorname{tang}\alpha$, les racines sont de signes contraires.

Si l'on prend pour k l'une des racines de cette équation et pour λ la valeur correspondante, on aura

$$\frac{d^2(\lambda x + y)}{dt^2} = g - h + \mu^2 k(\lambda x + y).$$

Nous supposons $h = g$ pour $t = 0$ et décroissant à partir de cette valeur nous pourrons donc prendre

$$h = g - nt.$$

Notre équation devient alors

$$\frac{d^2(\lambda x + y)}{dt^2} = nt + \mu^2 k(\lambda x + y);$$

nous aurons alors comme intégrale particulière

$$\lambda x + y = -\frac{nt}{\mu^2 k}.$$

Prenons d'abord pour k la racine positive que je désigne par a^2 et soit λ_1 la valeur correspondante de λ, on aura

$$\lambda_1 x + y = -\frac{nt}{\mu^2 a^2} + A e^{\mu a t} + B e^{-\mu a t},$$

et, comme pour $t = 0$

$$x = y = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0,$$

on aura

$$A + B = 0,$$

$$-\frac{n}{\mu^2 a^2} + \mu a(A - B) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{n}{2\mu^3 a^3} = -B.$$

Prenons ensuite pour k la racine négative que je désigne par $-b^2$ et, si λ_2 est la valeur correspondante de λ, on aura

$$\lambda_2 x + y = \frac{nt}{\mu^2 b^2} + C\cos\mu bt + D\sin\mu bt,$$

et les conditions initiales donneront

$$C = 0,$$
$$\frac{n}{\mu^2 b^2} + D\mu b = 0.$$

On a donc en définitive

$$(12) \qquad \lambda_1 x + y = \frac{n}{2\mu^2 a^2}\left(\frac{e^{\mu at} - e^{-\mu at}}{\mu a} - 2t\right),$$

$$(13) \qquad \lambda_2 x + y = \frac{n}{\mu^2 b^2}\left(t - \frac{\sin\mu bt}{\mu b}\right).$$

Ces valeurs font voir que, *quelque petit que soit* n, comme μ est très grand, x et y, et par suite aussi P et P′, croîtront très rapidement.

Mais le mouvement de rotation de la roue est fourni par l'équation

$$(14) \qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Pf R = -fm\mu^2 R y,$$

car l'on peut négliger y devant R, et, comme ω_0 est positif, $\frac{d\theta}{dt}$ s'annulera très rapidement et d'autant plus rapidement que μ sera plus grand, c'est-à-dire que la roue et les droites sur lesquelles elle s'appuie seront plus raides.

Si l'on supposait ces droites et la roue incompressibles, on serait conduit à supposer μ infini, et par suite P également infini, ce qui entraînerait une percussion arrêtant la roue dans un temps infiniment petit.

M. Painlevé a fait, au sujet du résultat analogue obtenu par M. Lecornu dans sa Communication du 6 mars, l'objection suivante. Il résulte des formules écrites plus haut que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ croissent

avec μ et que par suite la roue se comprime d'autant plus vite qu'elle est plus raide, et il semblait y voir une contradiction. Il y a là, au contraire, un résultat qui s'explique très bien.

En effet, plus la roue sera raide, plus, si l'adhérence est suffisante, les pressions P et P′ croîtront rapidement, et l'on conçoit qu'il puisse en résulter aussi une croissance plus rapide de x et de y.

Il est facile toutefois de voir que les valeurs finales de x et y décroissent lorsque μ croît.

En effet, si μ est très grand, ainsi que nous le supposons, on peut réduire les formules (12) et (13) aux suivantes, au moins comme première approximation :

$$\lambda_1 x + y = \frac{n}{2\mu^3 a^3} e^{\mu a t},$$

$$\lambda_2 x + y = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y = \frac{\lambda_2 n e^{\mu a t}}{2\mu^3 a^3 (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Mais

$$\lambda_1 = \frac{1 + k_1 + \cos^2\alpha}{f + \sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + k_2 + \cos^2\alpha}{f + \sin\alpha\cos\alpha} = -\cos\alpha\,\frac{\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha} - \cos\alpha}{f + \sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{k_1 - k_2}{f + \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha}}{f + \sin\alpha\cos\alpha},$$

donc

$$y = \frac{\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha} - \cos\alpha}{4\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha}}\,\frac{n e^{\mu a t}}{\mu^3 a^3} = q\,\frac{n e^{\mu a t}}{\mu^3 a^3},$$

en posant

$$q = \frac{\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha} - \cos\alpha}{4\sqrt{1 + f\,\mathrm{tang}\,\alpha}}.$$

(14) donnera donc

$$\mathrm{I}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mf\mathrm{R}qn\,\frac{e^{\mu a t}}{\mu a^3},$$

d'où

$$\mathrm{I}\,\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - mf\mathrm{R}qn\,\frac{e^{\mu a t}}{\mu^2 a^4}.$$

On en conclura pour la valeur t_1 de t pour laquelle la roue

s'arrête

$$e^{\mu a t_1} = \frac{\mu^2 a^4 \omega_0}{mf\mathrm{R}qn},$$

d'où

$$t_1 = \frac{1}{\mu a} \mathrm{L} \frac{\mu^2 a^4 \omega_0}{mf\mathrm{R}qn},$$

valeur qui, quel que soit n, tend vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, et est très petite pour de grandes valeurs de μ (¹).

De plus, on aura pour la valeur finale y_1 de y

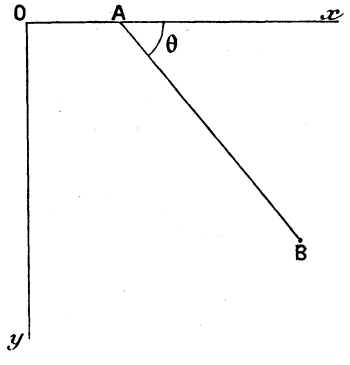
$$y_1 = \frac{qne^{\mu a t_1}}{\mu^3 a^3} = \frac{a\omega_0}{mf\mathrm{R}\mu},$$

valeur d'autant plus petite que μ est plus grand et qui s'annule pour μ infini.

On voit donc que, si la roue se comprime d'autant plus vite qu'elle est plus raide, sa compression finale est en raison inverse de sa raideur, résultat absolument rationnel.

Considérons maintenant le second problème envisagé par M. Painlevé en nous bornant au cas le plus simple, celui traité par M. Appell dans son *Traité de Mécanique*.

Fig. 5.



Considérons donc deux points matériels A et B de même masse égale à 1 et reliés par une tige dont la masse est négligeable par rapport à celle de A et de B.

(¹) Ce qui montre bien que, contrairement à ce que dit M. Painlevé dans sa Communication du 2 octobre, l'arrêt de la roue se fait dans un temps très court, quelque petit que soit n.

Soit $r = \mathrm{AB}$, nous supposerons la tension T de AB proportionnelle à l'allongement, de sorte que nous aurons

$$\mathrm{T} = \mu^2(r - r_0).$$

La tige se meut dans le plan vertical xOy et est soumise à la seule pesanteur [1].

Soient x l'abscisse de A, ξ et y les coordonnées de B. Les équations du mouvement des deux points A et B nous donneront

$$\begin{gathered} x'' = \mathrm{R}_x + \mathrm{T}\cos\theta, \\ \mathrm{R}_y + \mathrm{T}\sin\theta + g = 0, \\ \xi'' = -\mathrm{T}\cos\theta, \\ y'' = g - \mathrm{T}\sin\theta, \end{gathered}$$

où R_x et R_y sont les composantes de la réaction de Ox.

D'ailleurs, les relations

$$\xi = x + r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

donnent

$$\begin{gathered} \xi'' = x'' + r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r\theta'^2\cos\theta, \\ y'' = r''\sin\theta + 2r'\theta'\sin\theta + r\theta''\cos\theta - r\theta'^2\sin\theta. \end{gathered}$$

On a donc pour les équations du mouvement

$$\begin{gathered} x'' = \mathrm{R}_x + \mu^2(r - r_0)\cos\theta, \\ \mathrm{R}_y + g + \mu^2(r - r_0)\sin\theta = 0, \\ x'' + r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r\theta'^2\cos\theta + \mu^2(r - r_0)\cos\theta = 0, \\ r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r\theta'^2\sin\theta - g + \mu^2(r - r_0)\sin\theta = 0. \end{gathered}$$

Si le point A se déplace, on aura, de plus,

$$\mathrm{R}_x = -\varepsilon f \mathrm{R}_y, \qquad \varepsilon x' \mathrm{R}_y > 0,$$

où

$$\varepsilon = \pm 1.$$

---

[1] Il est, en effet, inutile de supposer une force horizontale appliquée en A pour réaliser les conditions initiales, car, du moment que l'on introduit une tension proportionnelle à l'allongement, il n'y aura aucune impossibilité même apparente.

On déduit alors des équations précédentes

$$\begin{aligned}
R_y &= -g - \mu^2(r - r_0)\sin\theta,\\
x'' &= \varepsilon f[g + \mu^2(r - r_0)\sin\theta] + \mu^2(r - r_0)\cos\theta,\\
r'' &= r\theta'^2 + g(\sin\theta - \varepsilon f\cos\theta)\mu^2 - (r - r_0)(\varepsilon f\sin\theta\cos\theta + 1 + \cos^2\theta),\\
r\theta'' &= [g + \mu^2(r - r_0)\sin\theta](\cos\theta + \varepsilon f\sin\theta) - 2r'\theta'.
\end{aligned}$$

Il n'y a plus ici, quelles que soient les conditions initiales, aucune impossibilité, même apparente.

Supposons qu'à l'instant initial pour $t = 0$ on ait

$$r = r_0, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad x'_0 > 0, \qquad r'_0 = 0,$$

on aura

$$R_y < 0,$$

et par suite on devra prendre

$$\varepsilon = -1,$$

et l'on devra garder cette valeur tant que x' et R_y conservent le même signe.

Nous aurons donc

$$(15) \quad r'' = r\theta'^2 + g(\sin\theta + f\cos\theta) + \mu^2(r - r_0)(f\sin\theta\cos\theta - 1 - \cos^2\theta).$$

Nous supposons

$$f > \frac{1 + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Considérons maintenant une période de temps assez courte, à partir de $t = 0$, pour que nous puissions pendant cette période, au moins comme première approximation, remplacer θ par une valeur moyenne et le traiter comme une constante dans l'équation précédente; de plus, nous négligerons dans le second membre de (15) $r'\theta'^2$, en vérifiant après coup la légitimité de ces approximations. Nous aurons alors

$$r'' = k^2\mu^2(r - r_0) + g(\sin\theta + f\cos\theta),$$

où nous avons posé

$$k^2 = f\sin\theta\cos\theta - 1 - \cos^2\theta > 0.$$

On tire de là, en tenant compte des conditions initiales, et

regardant toujours θ comme constant,

$$r = r_0 + \frac{g(\sin\theta + f\cos\theta)}{2\mu^2 k^2}(e^{\mu kt} + e^{-\mu kt} - 2),$$

on a d'ailleurs, puisque $\varepsilon = -1$,

$$x'' = -gf - (f\sin\theta - \cos\theta)\mu^2(r - r_0),$$

et l'on déduit de la valeur de k^2

$$\frac{1 + k^2}{\cos\theta} = f\sin\theta - \cos\theta,$$

$$\frac{2 + k^2}{\sin\theta} = f\cos\theta + \sin\theta,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$r = r_0 + \frac{g(2 + k^2)}{2\mu^2 k^2 \sin\theta}(e^{\mu kt} + e^{-\mu kt} - 2),$$

$$x'' = -gf - g\frac{(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \sin\theta\cos\theta}(e^{\mu kt} + e^{-\mu kt} - 2),$$

$$\mathrm{T} = g\frac{2 + k^2}{2k^2 \sin\theta}(e^{\mu kt} + e^{-\mu kt} - 2),$$

$$\mathrm{R}_y = -g - g\frac{2 + k^2}{2k^2}(e^{\mu kt} + e^{-\mu kt} - 2).$$

Si, d'ailleurs, μ est, ainsi que nous le supposons, très grand, on pourra se contenter de prendre

$$r = r_0 + \frac{g(2 + k^2)}{2\mu^2 k^2 \sin\theta} e^{\mu kt},$$

$$x'' = -g\frac{(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \sin\theta\cos\theta} e^{\mu kt},$$

$$\mathrm{T} = g\frac{2 + k^2}{2k^2 \sin\theta} e^{\mu kt},$$

et avec la même approximation [1]

$$r\theta'' = -\frac{g(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \cos\theta} e^{\mu kt}.$$

---

[1] En négligeant toujours les termes qui ne contiennent pas $e^{\mu kt}$ en facteur devant ceux qui le contiennent, on obtient ainsi des valeurs qu'il ne faudrait pas appliquer pour $t = 0$, mais qui donnent une approximation suffisante dès que t n'est pas rigoureusement nul.

Puis

$$x' = x'_0 - g\frac{(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3\mu\sin\theta\cos\theta}e^{\mu kt},$$

$$\theta - \theta_0 = -\frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^4\mu^2 r\cos\theta}e^{\mu kt}.$$

On a alors pour la valeur t_1 de t pour laquelle x' est nul

$$e^{\mu kt_1} = \frac{2x'_0 k^3\mu\sin\theta\cos\theta}{g(1+k^2)(2+k^2)},$$

d'où

$$t_1 = \frac{1}{\mu k}\mathrm{L}\left(\frac{2x'_0 k^3\mu\sin\theta\cos\theta}{g(1+k^2)(2+k^2)}\right),$$

valeur très petite puisque μ est très grand. On aura ensuite

$$\theta - \theta_0 = -\frac{x'_0\sin\theta}{k\mu r}.$$

On voit que cette valeur est très petite et que l'on peut bien, ainsi que nous l'avons fait, traiter θ comme constant.

Remarquons, d'ailleurs, que l'on aura pour la valeur de θ' à la fin de la période que nous considérons

$$\theta'_1 = -\frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3\mu r\cos\theta}e^{\mu kt_1} = -\frac{x'_0\sin\theta}{r}.$$

On pourrait faire à ce qui précède l'objection suivante : nous avons négligé, pour calculer r, $r\theta'^2$ dans le second membre de l'expression (15); or, nous venons de voir que la valeur finale de cette quantité est $r\theta'^2_1 = \frac{x'^2_0\sin^2\theta}{r}$ et cette quantité n'est pas négligeable. Il est toutefois facile de faire voir que dans le second membre de (15)

$$r\theta'^2 + g(\sin\theta + f\cos\theta) + \mu^2(r - r_0)(f\sin\theta\cos\theta - 1 - \cos^2\theta),$$

le premier terme est toujours négligeable par rapport à l'ensemble des deux autres.

En effet, à l'instant initial, $r\theta'^2$, qui est nul, est négligeable devant $g(\sin\theta + f\cos\theta)$, qui ne l'est pas. Ensuite, dès que t a une valeur appréciable, on a sensiblement

$$\theta' = -\frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3\mu r\cos\theta}e^{\mu k},$$

$$\mu^2(r - r_0)k^2 = \frac{g(2+k^2)}{2\sin\theta}kt, e\mu$$

et, par suite,

$$\frac{r\theta'^2}{\mu^2 k^2 (r - r_0)} = \frac{g(1+k^2)^2(2+k^2)}{2k^6 \mu^2 r \cos^2\theta} \sin\theta\, e^{\mu k t};$$

or, ce rapport croît constamment avec t et, à la fin de la période, pour $t = t_1$, on aura

$$\frac{r\theta_1'^2}{\mu^2 k^2 (r_1 - r_0)} = \frac{(1+k^2)x'_0}{k^3 \mu r} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

rapport qui est très petit à cause du facteur μ au dénominateur; nous avons donc pu négliger à bon droit le terme $r\theta'^2$ dans l'expression (15). On a, d'ailleurs, pour la valeur finale de la tension pour $t = t_1$,

$$T_1 = \frac{x'_0 k \mu \cos\theta}{(1+k^2)},$$

quantité très grande, et qui devient infinie avec μ, c'est-à-dire si l'on suppose la tige inextensible.

On voit, par ce qui précède, que, dans ce cas encore, l'étude plus détaillée du phénomène conduit absolument aux mêmes conclusions, pour les résultats finaux, que l'hypothèse de M. Lecornu. De plus, cette hypothèse me paraît *infiniment préférable*. En effet, d'une part, elle est, ainsi que nous l'avons vu, une conséquence naturelle de ce qui a toujours été admis comme étant la cause du frottement, et si, en introduisant des percussions, elle produit une discontinuité dans les phénomènes, ce fait est, ainsi que cela ressort des deux problèmes que nous venons d'examiner, une conséquence naturelle de l'hypothèse de la régidité absolue des liaisons, hypothèse qui, dans les cas que nous avons considérés, rend infinis les efforts supportés par ces liaisons.

Sans aucun doute, si l'on tient compte, comme nous l'avons fait, des tensions élastiques, on peut résoudre, ainsi que nous l'avons vu [1], les problèmes dont il s'agit sans introduire aucune nouvelle hypothèse; mais cela exige, dans chaque cas, une étude particulière et des calculs plus ou moins longs. Au lieu de cela l'hypothèse de M. Lecornu permet de déterminer immédiatement, dans

---

[1] Et ainsi que M. Lecornu l'avait déjà fait dans sa Communication du 6 mars, pour un autre cas.

chaque cas, le mouvement final qui se produit après la mise en contact des deux corps ; or, il est bien certain que ce qui se passe pendant la période très courte qui suit la mise en contact des corps présente, en général, peu d'intérêt.

Par exemple, dans le cas du problème de M. Chaumat, elle nous apprend que la roue s'arrête presque instantanément dès qu'elle est en prise avec Ox.

Dans l'autre problème, elle nous apprend que le point A s'arrête presque instantanément, et, quant à la vitesse du point B, après l'arrêt de A, elle sera fournie par le théorème des moments des quantités de mouvement pris par rapport à A qui nous donnera (¹)

$$rx'_0 \sin\theta + r^2\theta'_1 = 0,$$

d'où

$$\theta'_1 = -\frac{x'_0 \sin\theta}{r}.$$

C'est le résultat auquel nous étions arrivé par l'autre méthode, mais beaucoup moins simplement.

En résumé, l'hypothèse de M. Lecornu nous donne une image des phénomènes, qui, pour le détail de ceux qui se produisent au moment du contact des corps, peut être moins exacte que celle que l'on obtient en tenant compte de l'élasticité des liaisons, mais en revanche elle nous permet de prévoir d'une façon beaucoup plus simple, et avec une exactitude très suffisante, le résultat final qui se produit après cette période de mise en contact des corps, ce qui est le but principal que l'on se propose.

(¹) Puisqu'on regarde les phénomènes comme résultant d'une percussion appliquée en A qui réduit ce point au repos, et que la vitesse initiale de B est x'_0 parallèle à Ox et la vitesse finale $r\theta'_1$ perpendiculaire à AB.