BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 17-30
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__17_0>

SUR CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES, PONCTUELS ET TANGENTIELS, DE QUADRIQUES;

Par M. R. Bricard.

1. Soit (S) un système linéaire ponctuel, à trois paramètres, de quadriques, représentées par l'équation

$$S = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0, \tag{1}$$

où S_1, S_2, S_3, S_4 sont les premiers membres des équations de quatre quadriques fixes, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des coefficients variables. Le système (S) ne comprend évidemment en général qu'un nombre fini de quadriques dégénérées en un système de deux plans; les conditions d'une telle dégénérescence sont, en effet, au nombre de *trois*, et l'on dispose de trois paramètres.

M. Reye a montré que le nombre de ces quadriques dégénérées est, en général, de *dix* ([1]). *Peut-il arriver qu'un système* (S) *contienne une infinité de quadriques réduites à deux plans, et, dans le cas de l'affirmative, comment définir un tel système?* Tel est l'objet de ce travail.

Le problème peut être aussi posé sous sa forme corrélative : *trouver les systèmes linéaires, tangentiels, à trois paramètres, de quadriques, qui contiennent une infinité de quadriques réduites à deux points.* Il arrive que c'est ce second problème qu'il est le plus avantageux d'aborder : c'est donc ce que je vais faire.

2. Je commencerai par établir un théorème qui semble, au premier abord, étranger à la question qui nous occupe, mais dont la connaissance préalable me permettra tout à l'heure d'éviter une digression; ce théorème est le suivant :

Considérons une cubique gauche C *et une involution* (I) *sur cette cubique.* Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') *trois couples de points de* C, *conjugués dans* (I). *Construisons l'octaèdre*

([1]) *Journal de Crelle,* t. 86, 1879, p. 89.

$(abca'b'c')$, *qui a pour sommets les points* a, a', b, b', c, c', *et pour arêtes les droites qui joignent ces points deux à deux, à l'exception des trois droites* aa', bb', cc'. *Les faces de cet octaèdre se répartissent en deux groupes de quatre faces, deux faces quelconques d'un même groupe ayant en commun un sommet et un seul. Je dis que les quatre faces d'un même groupe (que j'appellerai* faces associées) *ont un point commun, qui se trouve sur la corde de* C *dont les extrémités* α_1 *et* β_1 *sont les points doubles de* (I).

Remarquons tout d'abord qu'il existe sur C une involution (I′), dont trois couples de points sont (α, β), (a, b), (a', b'). On le voit rapidement comme il suit : faisons correspondre homographiquement C à une conique G, et soient a_1, b_1, a'_1, b'_1, α_1, β_1, les points de G qui correspondent à a, b, a', b', α, β ; α_1 et β_1 sont sur G les points doubles d'une involution dont deux couples sont (a_1, a'_1) et (b_1, b'_1). Autrement dit $a_1 a'_1$ et $b_1 b'_1$ passent par le pôle de $\alpha_1 \beta_1$ par rapport à G. De là résulte que $a_1 b_1$ et $a'_1 b'_1$ se coupent sur $\alpha_1 \beta_1$. Par conséquent (α_1, β_1), (a_1, b_1), (a'_1, b'_1) sont trois couples de points en involution sur G. Donc, etc.

On peut encore dire que $\alpha\beta$, ab et $a'b'$ sont trois génératrices d'un même système d'une quadrique (Q) qui contient la cubique C. Soit alors D la génératrice de (Q), de l'autre système, qui passe par le point C : D rencontre ab, $a'b'$ et $\alpha\beta$. En d'autres termes, les plans (abc) et $(a'b'c')$ passent par le même point d de $\alpha\beta$. On verrait de même que le point d appartient aux plans $(ab'c')$ et $(a'bc')$. On a donc établi que les quatre plans (abc), $(ab'c')$, $(a'bc')$ et $(a'b'c)$ passent par un même point d de la corde $\alpha\beta$.

On reconnaît de la même façon que les plans $(a'bc)$, $(ab'c)$, (abc'), $(a'b'c')$ passent par un même point d' de $\alpha\beta$ [1].

3. Voici encore une remarque qui nous sera utile : soient (a, a'), (b, b'), (c, c') trois couples de points dont quatre ne sont pas dans un même plan, et

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad B = 0, \qquad B' = 0, \qquad C = 0, \qquad C' = 0,$$

---

[1] On peut encore démontrer que les points d et d' divisent harmoniquement le segment $\alpha\beta$. Mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

leurs équations tangentielles respectives. Les quadriques du réseau tangentiel représenté par l'équation

$$\lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' = 0$$

sont évidemment inscrites à l'octaèdre $(abca'b'c')$.

Ce réseau peut-il encore contenir une quadrique dégénérée en un système de deux points d, d'?

S'il en est ainsi, l'un de ces points devra appartenir à quatre faces de l'octaèdre, qui, on le voit tout de suite, sont nécessairement quatre faces associées. Réciproquement, si quatre faces associées sont concourantes en un point d, le réseau tangentiel considéré contient une quadrique dégénérée en deux points dont l'un est d; les quatre faces associées de l'autre groupe concourent alors nécessairement en un autre point d', qui complète avec d la quadrique dégénérée dont il s'agit.

Ainsi, dans ce cas, le réseau tangentiel contient quatre quadriques réduites à deux points; il ne peut contenir d'autre quadrique ainsi dégénérée.

4. Abordons maintenant la question posée. Soit (Σ) un système linéaire tangentiel à trois paramètres, de quadriques, que nous supposons satisfaire à la condition énoncée. (Σ) contient une infinité de quadriques dégénérées en deux points m, m'. Ces points décrivent une certaine courbe C irréductible ou non (il pourrait arriver que l'une des parties de C fût décrite par le point m, l'autre par le point m'). *Je supposerai expressément que* C *n'est pas une courbe plane et, plus généralement, que deux couples de points constituant une quadrique dégénérée de* (Σ) *ne sont pas, en général, dans un même plan.* Les cas ainsi exclus sont plus faciles à traiter et ne paraissent présenter que peu d'intérêt.

L'ordre *total* de C est, d'après cela, au moins égal à *trois*. Je vais montrer que C est une *biquadratique gauche*.

Montrons d'abord que C ne peut être une cubique gauche *seule*. Si, en effet, il en est ainsi, il est bien clair que les points m, m' engendrent une involution sur cette courbe. Soient alors (a, a'), (b, b'), (c, c') trois quadriques dégénérées du système (Σ). (Σ) comprend toutes les quadriques du réseau défini par ces trois quadriques dégénérées, c'est-à-dire toutes les quadriques inscrites à l'octaèdre $(abc\,a'b'c')$. Mais on a reconnu que quatre faces associées de cet octaèdre vont concourir en l'un ou l'autre de deux points (d, d'), situés en dehors de C (n° 2). (Σ) contiendrait donc des quadriques dégénérées en points n'appartenant pas à C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que C est une courbe d'ordre au moins égal à *quatre*. Soient alors (a, a'), (b, b'), (c, c'), (e, e') quatre quadriques dégénérées de (Σ), les divers points qui les constituent n'étant pas quatre à quatre dans un même plan. C doit rencontrer le plan (abc) au moins en un point d, autre que les points a, b, c. Si l'on désigne par

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad \ldots, \qquad E' = 0,$$

les équations tangentielles des points $a, a', \ldots, e'$, on a

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C. \tag{1}$$

Mais, par hypothèse,

$$DD' = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' + \rho EE'. \tag{2}$$

On en tire, en combinant les identités (1) et (2),

$$D'(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' + \rho EE',$$

ou

$$\rho EE' = (\alpha D' - \lambda A')A + (\beta D' - \mu B')B + (\gamma D' - \nu C')C.$$

Si ρ n'est pas nul, cette identité montre que la quadrique réduite à deux points e et e' est inscrite dans l'octaèdre dont les sommets ont pour équations respectives

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$
$$\alpha D' - \lambda A' = 0, \qquad \beta D' - \mu B' = 0, \qquad \gamma D' - \nu C' = 0.$$

Chacun de ces points doit donc (n° 3) appartenir à quatre faces de l'octaèdre en question ; mais une de ces faces est le plan (abc), qui devrait, en conséquence, contenir un des points e, e' : or on a supposé expressément le contraire.

Il faut donc que ρ soit nul, et l'identité (2) se réduit à

$$DD' = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC'.$$

Il résulte de tout cela que :

1° Le lieu des points constituant les quadriques dégénérées du système (Σ) est une courbe gauche du quatrième ordre C;

2° Si (a, a'), (b, b'), (c, c') sont trois couples de points constituant l'une de ces quadriques dégénérées, quatre faces associées de l'octaèdre $(abca'b'c')$ passent par l'un ou l'autre des deux points d, d', qui appartiennent à C; les deux points d, d' forment une quadrique dégénérée de (Σ).

On sait qu'il existe deux espèces de courbes gauches du quatrième ordre : les *biquadratiques gauches,* et les *quartiques gauches de seconde espèce,* qui sont tracées sur une seule quadrique.

C *ne peut être une quartique gauche de seconde espèce.* En effet, les points a, a', b, b', c, c', d, d' peuvent être répartis de quatre manières dans deux plans, comme l'indiquent les groupements suivants :

$$\begin{array}{lcl} a\,b\,c\,d & \text{et} & a'b'c'd', \\ a\,b'c'd & \text{et} & a'b\,c\,d', \\ a'b\,c'd & \text{et} & a\,b'c\,d', \\ a'b'c\,d & \text{et} & a\,b\,c'd'. \end{array}$$

Ces points forment donc *un système ponctuel de Lamé* (¹), c'est-à-dire que les quadriques qui les contiennent sont en nombre doublement infini.

Si donc m est un point quelconque de C, il existe une infinité de quadriques contenant les *neuf* points a, a', b, b', c, c', d, d', m et, par suite, la courbe C tout entière. Cette courbe, appartenant à une infinité de quadriques, est donc *une biquadratique gauche.*

Introduisons maintenant la représentation de la biquadratique C, supposée sans point double, au moyen de paramètres elliptiques, cette représentation étant faite de telle manière que quatre points de la courbe, situés dans un même plan, aient des paramètres de somme nulle. Désignons l'argument elliptique d'un point par la lettre même qui désigne ce point, mise entre parenthèses. On a les

---

(¹) Il suffirait pour cela que ces points fussent répartis dans deux plans de *trois* manières différentes.

relations

$$(a) + (b) + (c) + (d) = 0,$$
$$(a') + (b') + (c) + (d) = 0;$$

d'où

$$(a) + (b) = (a') + (b');$$

de même

$$(a) + (c) = (a') + (c'),$$
$$(b) + (c) = (b') + (c').$$

Par suite

$$(a) + (b) + (c) = (a') + (b') + (c') + \text{une demi-période.}$$

Cette demi-période n'est pas nulle, sans quoi les points a, a', ... coïncideraient deux à deux.

Appelons-la ω_1. On aura alors, par des combinaisons simples,

$$(a') - (a) = (b') - (b) = (c') - (c) = (d') - (d) = \omega_1.$$

Ainsi, *deux points constituant une quadrique dégénérée de* (Σ') *ont sur* C *des arguments différant d'une demi-période.* Ils sont donc conjugués dans l'une des trois involutions fondamentales bien connues, qui transforment cette courbe en elle-même ([1]).

5. En résumant l'analyse précédente, nous pouvons dire que :

Si le système (Σ) *satisfaisant à la condition imposée existe, il est défini de la manière suivante : Soient* C *une biquadratique gauche,* (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') *quatre couples quelconques de points conjugués sur cette courbe, deux points étant dits* conjugués *lorsque leurs arguments elliptiques diffèrent d'une même demi-période* ω_1. *Le système* (Σ) *est le système linéaire,*

([1]) La configuration formée par les points a, a', b, b', c, c', d, d' est bien connue. On pourra consulter à son sujet une Note de M. Humbert : *Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques* (ce *Bulletin*, 1904, p. 135), et une autre de M. Fontené : *Sur une configuration remarquable dans l'espace*, et qui figure dans ce même *Bulletin* (t. XXXIV, p. 2), dont l'auteur a bien voulu me communiquer le manuscrit.

La configuration dont il s'agit est désignée dans cette dernière Note sous le nom d'*octuple gauche complet*. J'adopterai cette expression dans la suite du présent travail.

tangentiel, à trois paramètres, défini par les quatre quadriques réduites à deux points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') (1).

Je vais maintenant montrer que, réciproquement, tout système ainsi défini (Σ) est satisfaisant, c'est-à-dire qu'il contient une infinité de quadriques réduites à deux points; l'une quelconque de ces quadriques dégénérées est constituée par deux points conjugués sur C.

A cet effet, rappelons tout d'abord que, si a et b sont deux points fixes de C, m et m' deux points conjugués variables sur la même courbe, les plans (abm) et (abm') engendrent un faisceau en involution. [La démonstration de cette propriété connue est immédiate. Un plan (P) quelconque passant par ab rencontre C en deux points m et m_1, dont les arguments (m) et (m_1) satisfont à la relation

$$(m)+(m_1)+(a)+(b)=0.$$

Leurs conjugués m' et m'_1 sont donc tels que l'on ait aussi

$$(m')+(m'_1)+(a)+(b)=0.$$

Donc, au plan (abm) ne correspond qu'un plan (abm'), ce qui suffit à établir la proposition.]

Cela posé, considérons sur C cinq couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), (e, e').

Soit Q la quadrique unique du faisceau tangentiel défini par les quadriques réduites à deux points (d, d') et (e, e'), qui touche le plan (abc). Les deux plans tangents menés à Q par ab sont conjugués dans l'involution définie par les deux couples de plans (abd), (abd') et (abe), (abe'). Mais, l'un de ces plans tangents étant le plan (abc), l'autre est nécessairement (abc'), en vertu de la propriété rappelée un peu plus haut.

De même, (Q) étant tangente au plan (abc') est tangente au plan $(ab'c')$. En continuant ainsi de proche en proche, *on voit que* (Q) *est inscrite à l'octaèdre* $(abca'b'c')$.

(1) C, dans cet énoncé, est supposée indécomposable et sans point double. Il existe des cas de dégénérescence d'un certain intérêt : par exemple, C peut se réduire à une cubique gauche et une corde de cette cubique.

Désignons alors par

$$A = 0, \quad \ldots, \quad E' = 0$$

les équations tangentielles des points $a, \ldots, e'$, comme je l'ai fait précédemment. Soit aussi

$$Q = 0,$$

l'équation tangentielle de (Q).

Puisque (Q) appartient au faisceau tangentiel défini par (d, d'), (e, e'), on a une identité de la forme

$$(3) \qquad Q = \delta DD' + \varepsilon EE',$$

δ et ε étant des nombres. Puisque (Q) est inscrite à l'octaèdre $(abca'b'c')$, on a

$$(4) \qquad Q = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC',$$

α, β, γ étant d'autres nombres. En éliminant Q entre (3) et (4) il vient

$$\varepsilon EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' - \delta DD',$$

ce qui montre bien que le couple (e, e') constitue une quadrique du système tangentiel (Σ) défini par les couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). *La proposition que j'avais en vue est donc démontrée,* puisque les cinq couples de points conjugués considérés sont absolument quelconques.

6. Le système (Σ) contient ∞^3 quadriques et ∞^2 coniques. Pour les définir d'une façon aussi simple que possible, je ferai d'abord la remarque suivante :

Considérons l'identité

$$EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \delta DD',$$

à laquelle donnent lieu les cinq couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), (e, e').

Si, les quatre premiers couples restant fixes, le cinquième varie, les rapports des coefficients α, β, γ, δ, pris à deux à deux, ne peuvent être constants.

Supposons, en effet, qu'un autre couple *quelconque* (f, f')

donne lieu à l'identité

$$FF' = K\alpha AA' + K\beta BB' + \gamma' CC' + \delta' DD';$$

on tirera des deux identités précédentes

$$KEE' - FF' = (\gamma - \gamma') CC' + (\delta - \delta') DD',$$

ce qui exigerait que les points f et f' soient les deux points par où vont passer respectivement les deux groupes de faces associées de l'octaèdre $(cdec'd'e')$. Or cela contredit le fait que (f, f') est un couple quelconque.

On en conclut que, si (e, e') varie, tous les rapports tels que $\frac{\alpha}{\beta}$ prennent au moins une fois toutes les valeurs possibles.

Cela posé, soit U une quadrique quelconque de (Σ). On a

$$U = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \delta DD',$$

Il résulte de la remarque précédente que je puis trouver un couple (e, e') tel que l'on ait

$$EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma' CC' + \delta' DD'.$$

On peut donc écrire

$$U = EE' + (\gamma - \gamma') CC' + (\delta - \delta') DD'.$$

Autrement dit, U est inscrite à l'octaèdre $(dced'c'e')$.

Donc :

Les diverses quadriques du système (Σ) *sont les quadriques inscrites dans les divers octaèdres qui ont leurs sommets opposés conjugués sur* C.

Mais ces divers octaèdres sont en nombre ∞^3, et chacun d'eux est circonscrit à ∞^2 quadriques. Comme il n'y a que ∞^3 quadriques dans (Σ), il faut en conclure que chacune de ces quadriques est inscrite à ∞^2 octaèdres définis comme on vient de le dire. Ainsi :

On peut inscrire à C *une double infinité d'octaèdres circonscrits à une quadrique quelconque de* (Σ).

On peut interpréter autrement ce résultat. Soit $(abca'b'c')$ l'un de ces octaèdres; les quatre faces associées (abc), $(ab'c')$,

$(a'bc')$, $(a'b'c)$ vont concourir en un même point d de C, et le tétraèdre $a'b'c'd$ est inscrit à C et circonscrit à la quadrique considérée. Par conséquent :

On peut inscrire à C *une double infinité de tétraèdres circonscrits à une quadrique quelconque de* (Σ) (¹).

Or, M. Humbert a déterminé (*loc. cit.*) les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse inscrire à une biquadratique gauche ∞^2 tétraèdres circonscrits à une quadrique. En tirant parti de son résultat, on voit que :

Les huit points où C *coupe une quadrique quelconque de* (Σ) *sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices tracés sur cette quadrique.*

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat de la manière suivante : soient (a, a'), (b, b') deux couples variables de points conjugués sur C. Les quadriques représentées par l'équation tangentielle

$$AA' + \lambda BB' = 0, \tag{5}$$

où λ est un paramètre variable, sont en nombre ∞^3 et appartiennent au système (Σ) : elles se confondent donc avec l'ensemble des quadriques de ce système.

Ce raisonnement ne tomberait en défaut que si toute quadrique du système (Σ) pouvait être représentée par une infinité d'équations de la forme précédente. S'il en était ainsi, on trouverait (d'une infinité de manières) de nouveaux couples (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), (a_2, a'_2), (b_2, b'_2) donnant lieu aux identités

$$AA' + \lambda BB' = A_1A'_1 + \lambda_1 B_1B'_1 = A_2A'_2 + \lambda_2 B_2B'_2.$$

Cela exige que les couples (a, a'), (b, b'), (a_1, a'_1), (b_1, b'_1) soient les sommets d'un octuple gauche complet. Il en sera de même pour les couples (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), (a_2, a'_2), (b_2, b'_2) et (a_2, a'_2), (b_2, b'_2), (a, a'), (b, b').

On aurait donc les relations suivantes entre arguments ellip-

(¹) On peut donner une troisième interprétation de ce même résultat, en faisant intervenir des *octaèdres tétragonaux de genre un*. Je renvoie pour cela à la Note citée de M. Fontené.

tiques :

$$(a)+(b)+(a_1)+(b_1)=0.$$
$$(a_1)+(b_1)+(a_2)+(b_2)=0,$$
$$(a_2)+(b_2)+(a)+(b)=0.$$

D'où l'on tire aisément

$$(a)+(b)=\text{demi-période}.$$

ce qui contredit le fait que les couples (a, a') et (b, b') varient *indépendamment*.

Cela posé, la quadrique représentée par l'équation (5) contient le quadrilatère $aba'b'$. Cela est bien d'accord avec le théorème de M. Humbert.

7. Proposons-nous maintenant de trouver les ∞^2 coniques du système (Σ).

Elles sont représentées, comme toutes les quadriques du système (Σ), par des équations de la forme

$$AA'+\lambda BB'.$$

Or une telle équation représente une quadrique qui contient les côtés du quadrilatère $aba'b'$, et qui ne peut se réduire à une conique que si le quadrilatère est plan. Réciproquement, si cette dernière condition est réalisée, l'équation représente bien une conique inscrite dans le quadrilatère $aba'b'$.

Les coniques du système (Σ) sont donc les coniques inscrites dans les quadrilatères plans ayant leurs sommets opposés conjugués sur (Σ). Un tel quadrilatère donne lieu à la relation

$$(a)+(a')+(b)+(b')=0$$

ou $(a)+(b)=$ demi-période. Autrement dit, la droite ab est une génératrice de l'un des quatre cônes contenant C.

Ces quatre cônes correspondent respectivement aux demi-périodes 0, ω_1, ω_2, ω_3.

En désignant leurs sommets respectifs par S_0, S_1, S_2, S_3, on parvient aisément au résultat suivant :

Tout plan passant par la droite S_0S_1 *rencontre* C *en quatre points qui forment deux couples de points conjugués*

(a, a') et (b, b'). *Une première série de coniques du système* (Σ) *est constituée par les diverses coniques inscrites dans les quadrilatères tels que* $aba'b'$.

On obtient une seconde série de coniques du système (Σ) *en remplaçant dans l'énoncé précédent la droite* S_0S_1 *par la droite* S_2S_3.

On a ainsi toutes les coniques du système (Σ). *On voit que les plans de ces coniques passent par l'une ou l'autre de deux droites fixes.*

8. Il est à remarquer que l'étude précédente fait connaître l'extension à l'espace de propriétés bien connues des *réseaux* tangentiels de coniques, dans le plan.

On sait qu'un tel réseau contient ∞^1 coniques qui se réduisent à deux points, dont le lieu est une courbe du troisième ordre, la *cayleyenne* du réseau. Les deux points qui constituent une conique dégénérée sont conjugués sur la cayleyenne.

Des faits analogues ne peuvent se présenter relativement à un système tangentiel à trois paramètres de quadriques, que dans le cas des systèmes (Σ) dont j'ai montré l'existence. On peut dire que la biquadratique C est la *cayleyenne* du système (Σ).

9. Il y a lieu de signaler une particularisation métrique du système (Σ), que l'on obtient en supposant qu'une des coniques de ce système se réduit à l'ombilicale. On voit alors aisément que C est la courbe commune à deux cylindres de révolution. Cette courbe possède un axe de symétrie, et deux points conjugués sont symétriques par rapport à cet axe.

Pour ne pas allonger outre mesure cette Note je me contenterai d'énoncer les résultats que l'on obtient dans ce cas remarquable.

Soit $(abca'b'c')$ *un octaèdre, tel que ses sommets opposés soient symétriques par rapport à une droite* D. *Il existe une infinité de quadriques de révolution inscrites dans cet octaèdre* (1). *Leurs foyers ont pour lieu une biquadratique* C

(1) On peut démontrer que l'on définit ainsi le *réseau* tangentiel le plus général, à part certains cas de dégénérescence, contenant une infinité de quadriques de révolution.

qui contient les sommets de l'octaèdre, et qui admet D *pour axe de symétrie. Les deux foyers d'une quadrique de révolution inscrite dans l'octaèdre sont symétriques par rapport à* D.

Les quadriques inscrites dans l'octaèdre sont en nombre doublement infini. L'ensemble des quadriques qui leur sont homofocales constitue un système linéaire tangentiel, à trois paramètres, (Σ), *qui contient une infinité de quadriques réduites à deux points : deux tels points sont sur* C *et symétriques par rapport à* D.

Les diverses coniques du système (Σ) *sont les focales des quadriques inscrites à l'octaèdre.*

Le système (Σ), particularisé métriquement comme je viens de le dire, se rattache à certains systèmes articulés. C'est ce que je ferai voir dans un prochain travail.

10. Les résultats de cette Note peuvent s'étendre à l'espace à n dimensions. En répétant, *mutatis mutandis*, le raisonnement du n° 5, le lecteur établira sans peine le théorème suivant, que j'énonce, en me bornant pour plus de simplicité au cas de l'espace à quatre dimensions; l'extension au cas général se fait d'elle-même.

Considérons la courbe C *de genre* un *et d'ordre* cinq, *représentée, dans l'espace à quatre dimensions, par les équations*

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{pu} = \frac{x_3}{p'u} = \frac{x_4}{p''u} = \frac{x_5}{p'''u},$$

où pu *est la fonction de Weierstrass, de périodes* $2\omega_1$ *et* $2\omega_2$. *Deux points* m *et* m' *de cette courbe seront dits* conjugués *quand leurs arguments elliptiques diffèrent de la demi-période* ω_1.

Cinq couples de points conjugués, sur la courbe C, *déterminent un système linéaire, tangentiel, à trois paramètres,* (Σ), *de quadriques* (¹); *le système* Σ *contient une infinité de quadriques réduites à deux points; les deux points constituant une telle quadrique dégénérée sont conjugués sur* C.

(¹) Il est bien clair que j'entends ici par *quadrique* la variété représentée par l'équation homogène du second degré $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$.

On peut encore dire, en employant le langage analytique :

Considérons les six polynomes homogènes, du second degré, à cinq variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5,

$$\begin{aligned} P_i = &(y_1 + p\,u_i y_2 + p'\,u_i y_3 + p''\,u_i y_4 + p'''\,u_i y_5) \\ &\times [y_1 + p(u_i + \omega_1) y_2 + p'(u_i + \omega_1) y_3 + p''(u_i + \omega_1) y_4 + p'''(u_i + \omega_1) y_5] \\ &(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \end{aligned}$$

où les arguments u_i *sont des constantes quelconques : il existe entre ces six polynomes une relation linéaire et homogène.*