BULLETIN DE LA S. M. F.

H. PICQUET

Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 153-156

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__153_1>

Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 17 mai 1876.)

Théorème I. — *Il y a, sur une surface du troisième degré, non réglée, cent huit paraboles, réelles ou imaginaires, correspondant quatre par quatre aux vingt-sept directrices rectilignes de la surface.*

En effet, tout plan coupant la surface suivant une conique, passe par une des vingt-sept directrices rectilignes. Considérons donc une de ces directrices D, et cherchons la condition pour qu'un plan qui la renferme coupe la surface suivant une parabole. Ce plan, supposé variable, a pour trace sur le plan de l'infini une droite δ tournant autour d'un point fixe α, trace de la droite D sur ce même plan. Cette droite δ coupe la cubique à l'infini de la surface en deux autres points, réels ou imaginaires, traces sur le plan de l'infini de l'ellipse ou de l'hyperbole déterminée dans la surface par le plan considéré : pour que cette conique devienne une parabole, il faudra que la droite δ soit tangente à la cubique à l'infini de la surface. Or, par le point α de cette cubique, on peut lui mener quatre tangentes réelles ou imaginaires; il y aura donc quatre plans, réels ou imaginaires, passant par la droite D et coupant la surface suivant une parabole.

Remarque. — Il n'y a pas lieu de considérer le plan ayant pour droite à l'infini la tangente en α à la cubique à l'infini de la surface : il coupe la surface suivant une conique dont un point à l'infini est venu en α, c'est-à-dire suivant une hyperbole dont une asymptote est parallèle à la directrice D. Seulement, si α était un point d'inflexion, une des quatre tangentes issues de α se confondrait avec la tangente en α : le plan considéré, tangent en α, serait alors un des quatre plans à section parabolique, laquelle aurait son axe parallèle à la droite D.

Théorème II. — *Il y a, sur une surface du troisième degré non réglée, quatre-vingt-une hyperboles équilatères, réelles ou imaginaires, correspondant trois par trois aux vingt-sept directrices rectilignes de la surface.*

En effet, pour que le plan considéré, passant par la droite D, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que les deux points variables γ et δ, où sa droite à l'infini rencontre la cubique à l'infini de la surface, soient conjugués harmoniques par rapport aux points a et b, également variables, où la même droite rencontre le cercle de l'infini. Or la géométrie des courbes du troisième degré apprend que, lorsque deux points a et b sont conjugués harmoniques par rapport à deux des points d'intersection d'une secante avec une cubique plane, ils sont sur une conique passant par les quatre points de contact des tangentes menées à la courbe par le troisième point d'intersection [1]. Il faut donc considérer le faisceau des coniques passant par les points de contact des tangentes issues de α et chercher, parmi les droites issues de α, celles qui coupent le cercle de l'infini suivant deux points situés sur une de ces coniques. Une des droites cherchées coupera donc, outre les coniques du faisceau, le cercle de l'infini suivant des points en involution, et par suite toutes les coniques du réseau défini par le faisceau considéré et le cercle de l'infini. Or les droites qui coupent les coniques d'un réseau suivant des points en involution enveloppent une courbe de troisième classe, cayleyenne du réseau [2], et les points doubles décrivent une cubique, hessienne du réseau. Il y aura donc par le point α trois droites, dont deux pourront être imaginaires, répondant à la question.

Remarque. — A toute directrice réelle correspond au moins une section équilatère réelle : comme une, au moins, des vingt-sept directrices est réelle, toute surface du troisième degré admet au moins une section équilatère réelle.

Théorème III. — *Les plans passant par une directrice rectiligne d'une surface du troisième degré, qui la coupent suivant une hyperbole équilatère, sont les plans tangents menés par cette droite au cône enveloppe des plans cycliques de tous les cônes du second degré passant par les quatre droites menées par un point quelconque de la directrice parallèlement aux axes des quatre paraboles de la surface dont les plans passent par cette directrice.*

Pour le démontrer, d'un point O de la directrice comme point de vue, faisons la perspective de la figure précédemment considérée dans le plan de l'infini. Au faisceau de coniques correspond un faisceau de cônes du second degré ayant quatre génératrices communes, dont les directions sont déterminées par les points de contact des quatre tangentes issues de α à la cubique à l'infini de la sur-

---

[1] C'est une conséquence immédiate de la proposition XIII du Traité de Maclaurin *Sur les courbes du troisième degré.* (*Voir* la traduction française de ce traité, par M. de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure,* p. 236.)

[2] *Voir* notre *Étude géométrique des systèmes linéaires de coniques,* p. 19.

face, c'est-à-dire par les axes des quatre sections paraboliques passant par la directrice : au cercle de l'infini correspond une sphère concentrique de rayon nul, et les plans des sections équilatères cherchées sont ceux qui coupent cette sphère suivant deux droites situées sur un cône du faisceau, c'est-à-dire qui coupent un cône du faisceau suivant deux droites isotropes, ou enfin qui sont cycliques pour un certain cône du faisceau; d'où il résulte que le cône cayleyen d'un réseau de cônes du second degré, à sommet commun, déterminé par trois cônes dont l'un est une sphère de rayon nul, n'est autre que le cône enveloppe des plans cycliques des cônes du faisceau déterminé par les deux autres, et le cône hessien le lieu des rayons doubles des faisceaux en involution suivant lesquels ces plans coupent les cônes du faisceau. Par suite :

Théorème IV. — *Le cône enveloppe des plans cycliques d'un faisceau de cônes du second degré à sommet commun est un cône de troisième classe. Ces plans coupent les cônes du faisceau suivant des faisceaux en involution dont les rayons doubles engendrent un cône du troisième degré.*

Dans le cas particulier où le cercle de l'infini ferait partie du faisceau de coniques considéré dans le plan de l'infini, c'est-à-dire où les tangentes en quatre des points d'intersection de ce cercle avec la cubique à l'infini de la surface concourraient en un même point qui serait le point α de la cubique, la condition cherchée serait évidemment remplie pour toute droite issue de α, et l'on aurait une surface particulière du troisième degré, qu'on peut appeler *équilatère*, satisfaisant à quatre conditions, et telle que tout plan passant par une certaine directrice de la surface la coupe en outre suivant une hyperbole équilatère.