BULLETIN DE LA S. M. F.

A. QUIQUET

Sur l'emploi simultané de lois de survie distinctes

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 286-290

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__286_0>

SUR L'EMPLOI SIMULTANÉ DE LOIS DE SURVIE DISTINCTES;

Par M. Albert Quiquet.

Dans deux Communications faites à l'Académie des Sciences [1], j'ai établi, il y a déjà plusieurs années, comment une formule, indiquée par Gompertz pour interpoler les Tables de survie, puis généralisée par Makeham, était susceptible d'une nouvelle généralisation. La fonction trouvée par les deux actuaires anglais jouit d'une propriété fort utile dans les assurances sur la vie, et j'avais surtout cherché à étendre cette propriété. Par l'emploi d'une loi de survie de Gompertz et de Makeham, en effet, on peut exprimer, à l'aide d'*une seule* variable, indépendante de x, la probabilité que dans x années un groupe quelconque d'individus, obéissant à cette loi, existera encore tout entier : la variable en question ne dépend que des âges de ces individus.

En employant les lois généralisées auxquelles conduisent les Communications précitées, on arrive à exprimer, à l'aide seulement de n variables, indépendantes de x, la probabilité que dans x années un groupe de $N = n + p$ individus, obéissant tous à une de ces lois généralisées, existera encore tout entier : les n variables ne dépendent que des $n + p$ âges, et p est un nombre entier positif absolument quelconque.

On conçoit l'intérêt pratique d'une propriété semblable, car, de cette probabilité, on passe aisément aux annuités viagères sur $n + p$ têtes et, de là, à diverses opérations usuelles d'assurances.

La loi de Gompertz et de Makeham n'est pas toujours suffisante comme biomètre, et en la généralisant ainsi j'offrais d'abord une plus grande variété de formules pour interpoler les Tables de survie; puis les efforts des calculateurs se dirigeaient dans une voie où ils retrouvaient, avec extension, une propriété célèbre de cette loi. Mais le problème de probabilité que j'avais résolu comportait une restriction : les $n+p$ individus devaient tous obéir à *une même* loi de survie.

Or les besoins croissants de l'industrie des assurances m'ont

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 12 mai 1888 et 25 novembre 1889.

amené à considérer cette restriction comme une gêne. Voulant m'en affranchir, j'ai repris ma démonstration, et j'ai constaté [1] qu'il fallait en changer bien peu les termes pour y comprendre le cas tout à fait général où les $n+p$ individus obéissent simultanément à des lois de survie *distinctes*. Le problème que je veux résoudre devient donc le suivant :

Soient a, b, ..., l les âges de N *individus qui suivent des lois de survie* distinctes ou non, *et supposons que le nombre des vivants à l'âge z pour un nombre donné de naissances soit figuré par $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_N(z)$, suivant qu'il s'agit du premier, du second, ..., du* N^{ième} *individu. Soient, d'autre part, n fonctions de a, b, ..., l, que j'appelle α, β, ..., θ, indépendantes entre elles et indépendantes du temps x, n étant plus petit que* N. *Quelle doit être la forme respective de $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_N(z)$, pour que l'on ait, quel que soit x,*

$$(1) \qquad \frac{\varphi_1(a+x)}{\varphi_1(a)}\,\frac{\varphi_2(b+x)}{\varphi_2(b)}\cdots\frac{\varphi_N(l+x)}{\varphi_N(l)} = G(\alpha, \beta, \ldots, \theta, x)?$$

(1) étant une identité par rapport à x, nous pouvons égaler les dérivées logarithmiques par rapport à x des deux membres de (1); posant

$$\frac{\partial . L\varphi_g(z)}{\partial z} = \psi_g(z), \qquad \frac{\partial . LG(\alpha, \beta, \ldots, \theta, x)}{\partial x} = F(\alpha, \beta, \ldots, \theta, x),$$

nous avons ainsi

$$(2) \quad \psi_1(a+x) + \psi_2(b+x) + \ldots + \psi_N(l+x) = F(\alpha, \beta, \ldots, \theta, x).$$

Comme la relation (2) doit aussi avoir lieu quel que soit x, nous pouvons encore égaler les dérivées des deux membres prises par rapport à x, et cela n fois successivement. Faisant enfin $x=0$ dans tous les résultats, nous arrivons au système

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_1(a) + \psi_2(b) + \ldots + \psi_N(l) = F_0, \\ \psi_1'(a) + \psi_2'(b) + \ldots + \psi_N'(l) = F_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_1^{(n)}(a) + \psi_2^{(n)}(b) + \ldots + \psi_N^{(n)}(l) = F_n, \end{cases}$$

---

[1] Voir *Comptes rendus,* 22 juin 1903.

$F_0, F_1, \ldots, F_n$ étant ce que deviennent F et ses n premières dérivées prises par rapport à x quand on y fait $x = 0$.

Mais les seconds membres de (3) sont au nombre de $n+1$ et ne dépendent que de n variables, $\alpha, \beta, \ldots, \theta$. Il y a donc une relation entre les premiers membres.

Ces premiers membres ne sont autre chose que $n+1$ fonctions de $n+p$ variables indépendantes, $a, b, \ldots, l$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait entre eux une relation indépendante de ces variables est, comme il résulte d'un Mémoire de Jacobi, que les déterminants fonctionnels de ces $n+1$ fonctions par rapport à $n+1$ quelconques des variables soient égaux à zéro.

L'un de ces déterminants fonctionnels est

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \psi_1'(a) & \psi_2'(b) & \ldots \\ \psi_1''(a) & \psi_2''(b) & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n+1)}(a) & \psi_2^{(n+1)}(b) & \ldots \end{vmatrix}.$$

Pour que ce déterminant soit identiquement nul, il faut et il suffit qu'il y ait une même relation linéaire et homogène entre tous les éléments de chacune de ses lignes ou de ses colonnes. Soit en particulier, pour la première colonne,

$$A_0\psi_1'(a) + A_1\psi_1''(a) + \ldots + A_n\psi_1^{(n+1)}(a) = 0;$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants de a et non tous nuls à la fois.

Comme a est un âge arbitraire, on peut dire que la fonction $\psi_1(z)$ satisfait à l'équation

$$A_0\psi_1'(z) + A_1\psi_1''(z) + \ldots + A_n\psi_1^{(n+1)}(z) = 0.$$

Ce résultat a été obtenu avec la première colonne de (4). Si nous avions opéré avec la seconde, nous serions arrivés pareillement à

$$A_0\psi_2'(z) + A_1\psi_2''(z) + \ldots + A_n\psi_2^{(n+1)}(z) = 0,$$

les $A_0, A_1 \ldots, A_n$ étant *les mêmes* que ci-dessus.

En répétant toujours les mêmes raisonnements, soit avec une autre colonne de (4), soit avec une quelconque des colonnes des autres déterminants fonctionnels tels oue (4) qui ont à intervenir, nous voyons que toutes les conditions nécessaires et suffisantes de Jacobi se résument ici d'une manière bien simple :

Si $\psi_g(z)$ est une quelconque des fonctions $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ..., $\psi_N(z)$, cette fonction satisfait à

$$A_0\psi'_g(z) + A_1\psi''_g(z) + \ldots + A_n\psi_g^{(n+1)}(z) = 0, \tag{5}$$

où les A_0, A_1, ..., A_n sont indépendants de z et de g, c'est-à-dire constants.

(5) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre, et la suite du problème n'offre plus de difficultés. Aussi j'arrive de suite à l'expression générale des fonctions $\varphi_g(z)$.

Soit r_i une quelconque des racines de l'équation caractéristique

$$A_0 + A_1 r + \ldots + A_n r^n = 0, \tag{6}$$

et λ_i son degré de multiplicité. On a

$$\varphi_g(z) = e^{A+Bz+\Sigma e^{r_i z} f_i(z)}, \tag{7}$$

où $f_i(z)$ est un polynome de degré $\lambda_i - 1$ quand r_i n'est pas nulle et de degré $\lambda_i + 1$ quand r_i est nulle. Quant au signe Σ, il s'étend à toutes les racines distinctes de l'équation caractéristique.

Si l'équation caractéristique (6) est commune à toutes les fonctions (7) et par suite les racines r_i, par contre les constantes d'intégration A et B et les coefficients des polynomes $f_i(z)$, tout en étant des constantes par rapport à z, *ne sont pas astreints à être identiques* dans les diverses fonctions $\varphi_g(z)$. En d'autres termes, ces constantes peuvent passer pour des fonctions de g : de là les distinctions possibles entre les fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_N(z)$.

Comme applications, les cas où l'on fait intervenir des lois de survie distinctes commencent à être nombreux.

Lorsqu'il s'agit d'une rente de survie, les compagnies françaises usent de la Table de mortalité AF pour les assurés et de la Table RF pour les bénéficiaires.

Pour les rentes viagères sur deux ou plusieurs têtes, on essaie de tenir compte du sexe.

On étudie aussi la survie suivant l'âge à l'entrée.

L'assurance contre les accidents réclame des Tables de mortalité de valides et d'invalides, etc.

Pour ces divers objets on pressent les ressources de la variété presque indéfinie des fonctions (7), et, dans les calculs sur plusieurs têtes, les avantages de la propriété qui leur est commune.