Bulletin de la S. M. F.

Raoul Perrin

Sur les intégrales de l'équation différentielle des coniques et leur interprétation géométrique

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 275-285
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__275_1>

SUR LES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. Raoul Perrin.

I. Dans une précédente Communication [1], j'ai démontré que l'équation différentielle des coniques

$$9y''^2y^{\text{v}} - 45y''y'''y^{\text{iv}} + 40y'''^3 = 0 \tag{1}$$

conduit, lorsqu'on y remplace y'', y''', ... par leurs expressions en fonction de R, ρ_1, ρ_2, ρ_3 (rayons de courbure de la conique et de ses développées successives en des points correspondants, affectés des signes convenables pour que ce soient aussi les dé-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 54.

rivées successives de l'arc S de la conique par rapport à l'angle φ que fait la tangente avec une direction fixe), à l'équation différentielle intrinsèque

$$9R^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45R\rho_1\rho_2 + 40\rho_1^3 = 0. \tag{2}$$

J'ai établi en outre que, si l'on écrit ainsi l'équation générale finie des coniques

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \tag{3}$$

et que l'on pose

$$\begin{cases} \delta = ab - h^2, \\ \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2, \end{cases} \tag{4}$$

les équations (1) et (2) admettent respectivement pour intégrales premières

$$3^6\delta^3 y''^8 = \Delta^2(3y''y^{\text{IV}} - 5y'''^2)^3, \tag{5}$$

$$3^6\delta^3 R^{10} = \Delta^2(9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2)^3 \sin^2\omega \tag{6}$$

(ω étant l'angle des axes de coordonnées).

Les parenthèses des seconds membres des équations (5) et (6), égalées à zéro, fournissent respectivement l'équation différentielle ordinaire et l'équation différentielle intrinsèque des paraboles.

II. J'ai remarqué depuis que l'équation

$$\alpha R^2 + \beta R\rho_2 + \gamma\rho_1^2 = 0 \tag{7}$$

comprend comme cas particuliers, non seulement l'équation des paraboles ($\alpha = 9$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$), comme il vient d'être dit, mais aussi les équations générales d'autres familles de courbes bien connues, savoir :

(8) $\quad 18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2 = 0,\quad$ hyperboles équilatères,

(9) $\quad 4R^2 - 2R\rho_2 + 3\rho_1^2 = 0,\quad$ chaînettes,

(10) $\quad 4R^2 - 4R\rho_2 + 5\rho_1^2 = 0,\quad$ courbes de poursuite,

dans le cas où la vitesse du poursuivant est moitié de celle du poursuivi.

Il est à remarquer que ces quatre familles comprennent des courbes dont les branches ont toutes une forme analogue, c'est-à-dire possèdent un sommet à distance finie et deux bras s'étendant à l'infini de part et d'autre du sommet, avec courbure régulièrement décroissante.

D'autre part, l'équation (7) admet, comme il est facile de le vérifier, l'intégrale première

$$\alpha R^2 + (\beta + \gamma)\rho_1^2 = kR^{-\frac{2\gamma}{\beta}}, \tag{11}$$

où k est la constante d'intégration, que l'on peut d'ailleurs exprimer par $\alpha R_0^{-2\frac{\beta+\gamma}{\beta}}$, en appelant R_0 le rayon de courbure au sommet (point pour lequel $\rho_1 = 0$).

Par conséquent, pour toutes les courbes dont il s'agit, le rayon de courbure de la développée est lié à celui de la courbe au point correspondant par la formule

$$\rho_1 = R\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}\sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2\frac{\beta+\gamma}{\beta}} - 1}, \tag{12}$$

qui donne en particulier

$$\rho_1 = 3R\sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \quad \text{pour la parabole,}$$

$$\rho_1 = 3R\sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{4}{3}} - 1} \quad \text{pour l'hyperbole équilatère,}$$

$$\rho_1 = 2R\sqrt{\frac{R}{R_0} - 1} \quad \text{pour la chaînette,}$$

$$\rho_1 = 2R\sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad \text{pour la courbe de poursuite particulière.}$$

III. Il était à prévoir que l'équation (8) des hyperboles équilatères conduirait à une intégrale de (2) analogue à celle (6) que fournit l'équation des paraboles. Et, en effet, si l'on pose

$$(\alpha R^2 + \beta R\rho_2 + \gamma\rho_1^2)^m = kR^n$$

et que l'on cherche à déterminer α, β, γ, m et n de manière que l'élimination de k entre cette équation et sa dérivée conduise précisément à l'équation (2), on trouve deux systèmes de solutions, savoir :

$$m = 3,\quad n = 10,\quad \alpha = 9,\quad \beta = -3,\quad \gamma = 4,$$
$$m = 3,\quad n = 8,\quad \alpha = 18,\quad \beta = -3,\quad \gamma = 5,$$

dont le premier fournit l'intégrale (6) déjà connue, et le second, la nouvelle intégrale que voici :

$$(18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2)^3 = kR^8. \tag{13}$$

La parenthèse du premier membre de cette équation égalée à zéro donne bien, comme il était prévu, l'équation différentielle intrinsèque des hyberboles équilatères.

A cette nouvelle intégrale de (2) doit évidemment correspondre une nouvelle intégrale de (1), distincte de celle (5) déjà connue : pour la former explicitement, il suffit de remplacer dans (13) R, ρ_1, ρ_2 par leurs expressions en fonction de y', y'', y''', y^{IV}, ω.

J'ai donné, dans la Note précitée, ces expressions [formules (18)] quand $\omega = \frac{\pi}{2}$; dans le cas de ω quelconque, les formules à employer sont les suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} R &= \frac{w^{\frac{3}{2}} y''^{-1}}{\sin\omega}, \\ \rho_1 &= \frac{R}{\sin\omega}[3(y' + \cos\omega) - w y''^{-2} y'''], \\ \rho_2 &= \frac{R}{\sin^2\omega}\left[\begin{aligned} &9(y' + \cos\omega)^2 + 3w - 8w y''^{-2} y'''(y' + \cos\omega) \\ &\quad + w^2 y''^{-4}(3y'''^2 - y'' y^{\text{IV}}) \end{aligned}\right], \\ w &= 1 + y'^2 + 2y'\cos\omega. \end{aligned}\right.$$

En opérant la substitution indiquée, on trouve pour la nouvelle intégrale cherchée l'équation

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} k y''^{10}\sin^4\omega = [&9y''^4 - 6y''^2 y'''(y' + \cos\omega) \\ &+ (1 + y'^2 + 2y'\cos\omega)(3y'' y^{\text{IV}} - 4y'''^2)]^3. \end{aligned}\right.$$

Mais on aperçoit immédiatement que cette équation renferme non pas seulement une, mais bien *deux* constantes arbitraires indépendantes l'une de l'autre, savoir $k\sin^4\omega$ et $\cos\omega$, en sorte qu'elle doit fournir deux intégrales distinctes, chacune à une seule constante.

Pour dégager ces deux intégrales distinctes et obtenir en même temps leur interprétation géométrique, remplaçons dans (15) y'', y''', y^{IV} par leurs valeurs en fonction des coefficients de l'équation générale (3), savoir, comme il a été indiqué dans ma Note précitée :

$$y'' = \pm \Delta v^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \mp \frac{3}{2} \Delta v^{-\frac{5}{2}} v',$$

$$y^{\text{IV}} = \pm \frac{3}{4} \Delta v^{-\frac{7}{2}} (5v'^2 - 2vv''),$$

$$v = -\delta x^2 + 2(fh - bg)x + f^2 - bc, \qquad v' = -2(\delta x + bg - fh),$$
$$v'' = -2\delta, \qquad 2vv'' - v'^2 = 4b\Delta.$$

L'équation (15) se transforme alors en la relation suivante :

$$k \sin^4 \omega = -\frac{3^6(a + b - 2h\cos\omega)^3}{\Delta},$$

qui donne l'expression de $k \sin^4 \omega$ en fonction de a, b, h et $\cos\omega$. En la reportant dans l'équation (15), celle-ci devient

$$0 = 9(a + b - 2h\cos\omega)y''^{\frac{10}{3}} + \Delta^{\frac{1}{3}}[9y''^4 - 6y''^2y'''(y' + \cos\omega) + (1 + y'^2 + 2y'\cos\omega)(3y''y^{\text{IV}} - 4y'''^2)],$$

et, puisque ω est arbitraire, on peut égaler à zéro séparément le coefficient de $\cos\omega$ et la partie indépendante de ω, ce qui fournit les deux intégrales distinctes cherchées, savoir :

$$3^6(a + b)^3 y''^{10} = \Delta[6y'y''^2y''' - 9y''^4 + (1 + y'^2)(4y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}})]^3, \tag{16}$$

$$3^6 h^3 y''^{10} = \Delta(3y'y''y^{\text{IV}} - 4y'y'''^2 + 3y''^2y''')^3. \tag{17}$$

Les parenthèses des seconds membres de ces deux équations, égalées à zéro, fournissent les équations différentielles des deux systèmes de coniques qui sont respectivement caractérisées par les relations

$$a + b = 0, \qquad h = 0,$$

entre les coefficients de leur équation en coordonnées cartésiennes.

Au point de vue géométrique, la première de ces relations exprime que les directions des points à l'infini de la conique font avec l'une ou l'autre bissectrice des axes de coordonnées des angles θ_1, θ_2, satisfaisant à la condition

$$\tag{18} \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 = -\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}.$$

La seconde exprime que les directions des axes de coordonnées sont conjuguées par rapport à la conique.

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$ (coordonnées rectangulaires), la condition (18) caractérise les hyperboles équilatères, et la relation $h = 0$ les coniques dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Appelons *coniques pseudo-équilatères* celles qui satisfont à la condition (18) et *coniques axiales* celles qui admettent les directions des axes de coordonnées comme directions conjuguées, et posons

$$\tag{19} \left\{ \begin{aligned} H_1 &= 6y'y''^2y''' - 9y''^4 + (1+y'^2)(4y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}}), \\ H_2 &= y'(3y''y^{\text{IV}} - 4y'''^2) - 3y''^2y''', \\ D &= y''; \\ P &= 3y''y^{\text{IV}} - 5y'''^2. \end{aligned} \right.$$

Les équations

$$D = 0, \qquad P = 0, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0$$

seront respectivement les équations différentielles des droites, des paraboles, des coniques pseudo-équilatères et des coniques axiales, et les trois intégrales premières que nous avons obtenues pour l'équation (1), savoir (5), (16) et (17), pourront s'écrire

$$\tag{20} \left\{ \begin{aligned} PD^{-\frac{8}{3}} &= 9\delta\Delta^{-\frac{2}{3}}, \\ H_1D^{-\frac{10}{3}} &= 9(a+b)\Delta^{-\frac{1}{3}}, \\ H_2D^{-\frac{10}{3}} &= 9h\Delta^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned} \right.$$

Puisque $\delta = ab - h^2$, ces formules permettent de transformer en une expression différentielle, fonction de D, P, H_1 et H_2, toute fonction de $\frac{a}{\Delta^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{b}{\Delta^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{h}{\Delta^{\frac{1}{3}}}$ et de former, par conséquent, l'équation différentielle de tout système de coniques défini par une relation entre ces trois quantités, c'est-à-dire par une relation où ne figurent que la forme ou l'orientation, ou les deux ensemble, mais non la position absolue dans le plan.

On tire en effet de (20)

$$
(21)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{a}{\Delta^{\frac{1}{3}}} &= \frac{D^{-\frac{10}{3}}}{18}\left(H_1 + \sqrt{H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4}\right),\\
\frac{b}{\Delta^{\frac{1}{3}}} &= \frac{D^{-\frac{10}{3}}}{18}\left(H_1 - \sqrt{H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4}\right),\\
\frac{h}{\Delta^{\frac{1}{3}}} &= \frac{1}{9}H_2 D^{-\frac{10}{3}},\\
\frac{\delta}{\Delta^{\frac{2}{3}}} &= \frac{1}{9}PD^{-\frac{8}{3}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Proposons-nous, par exemple, de former l'équation différentielle du système des coniques semblables à une conique donnée. On sait que l'expression

$$\frac{ab - h^2}{(a + b - 2h\cos\omega)^2}$$

a la même valeur pour toutes les coniques semblables. Soit q cette valeur pour la conique donnée. On trouvera immédiatement pour l'équation demandée

$$(22)\qquad 9PD^4 - q(H_1 - 2H_2\cos\omega)^2 = 0.$$

Si l'on veut obtenir l'équation différentielle des cercles, il faut poser

$$a = b, \qquad h = a\cos\omega,$$

ce qui donne les deux équations

$$
\begin{aligned}
H_1^2 - 4H_2^2 - 36PD^4 &= 0,\\
2H_2 &= H_1\cos\omega,
\end{aligned}
$$

dont la première représente le système des coniques ayant leurs axes parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

Si, dans ces deux équations, on remplace P, D, H_1, H_2 par leurs expressions en y', y'', y''', y^{IV}, il suffira d'éliminer y^{IV} pour obtenir l'équation cherchée; mais le résultat ne s'obtiendrait que par un calcul pénible. Il est beaucoup plus simple de poser $\rho_1 = 0$, ce qui équivaut, d'après l'une des formules (14), à

$$(23)\qquad 3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' + \cos\omega(3y''^2 - 2y'y''') = 0;$$

telle est l'équation des cercles.

Connaissant trois intégrales premières de (1), chacune avec une constante arbitraire, il suffit d'éliminer entre elles y^{IV} et y''' pour obtenir une intégrale troisième à trois constantes arbitraires, c'est-à-dire une équation différentielle du second ordre, relation entre y', y'' et les constantes

$$\frac{a+b}{\Delta^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{h}{\Delta^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{ab-h^2}{\Delta^{\frac{2}{3}}}.$$

Le calcul donne pour cette équation différentielle

$$(24)\qquad o = \left\{ \begin{array}{l} \Delta^{\frac{2}{3}} y''^{\frac{4}{3}} + [4hy' + (a+b)(1+y'^2)]\,\Delta^{\frac{1}{3}} y''^{\frac{2}{3}} \\ \quad + \delta(1-y'^2)^2 + [(a+b)y' + h(1+y'^2)]^2 \end{array} \right\}.$$

On en tire alors deux expressions

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{1}{2}} y''^{\frac{2}{3}} &= -(ay'^2 + 2hy' + b) \\ &= -(by'^2 + 2hy' + a), \end{aligned}$$

dont la seconde seule se trouve vérifiée, quand on y reporte la valeur de y', savoir

$$y' = \frac{1}{2b}\left(-2h \pm v^{-\frac{1}{2}} v'\right),$$

où v et v' ont les significations données précédemment.

Comme d'ailleurs le rayon de courbure R en un point quelconque est égal à $\frac{(1+y'^2+2y'\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}{y''\sin\omega}$, on arrive à cette expression du rayon de courbure au point où le coefficient angulaire de la tangente est y', en fonction des coefficients de l'équation générale et de l'angle ω des axes de coordonnées

$$(25)\qquad R = \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{\sin\omega}\left(\frac{1+y'^2+2y'\cos\omega}{by'^2+2hy'+a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si la conique donnée est un cercle, son rayon sera donc

$$R = \frac{\sqrt{f^2+g^2-2fg\cos\omega - ac\sin^2\omega}}{a\sin\omega},$$

comme il est facile de le vérifier directement.

IV. Des résultats analogues peuvent être obtenus au moyen des équations différentielles intrinsèques (6) et (13), qui sont deux intégrales premières distinctes de (2). La signification géométrique de la constante k qui figure dans (13) a d'ailleurs été donnée ci-dessus, en sorte que ces deux intégrales premières de (2) peuvent s'écrire

$$(26)\qquad 9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2 = 9\delta\Delta^{-\frac{2}{3}}\sin^{-\frac{2}{3}}\omega\, R^{\frac{10}{3}},$$

$$(27)\qquad 18R^2 - 3R\rho_2 + 5\rho_1^2 = -9(a+b-2h\cos\omega)\,\Delta^{-\frac{1}{3}}\sin^{-\frac{4}{3}}\omega\, R^{\frac{8}{3}}.$$

L'élimination de ρ_2 est immédiate et donne l'intégrale seconde

$$(28)\qquad R^2 + \left(\frac{\rho_1}{3}\right)^2 + \frac{\delta}{(\Delta\sin\omega)^{\frac{2}{3}}}R^{\frac{10}{3}} + \frac{a+b-2h\cos\omega}{\Delta^{\frac{1}{3}}\sin^{\frac{4}{3}}\omega}R^{\frac{8}{3}} = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\rho_1}{3R} = u, \qquad \frac{R^2}{\Delta\sin\omega} = v^3,$$

cette équation peut s'écrire

$$(29)\qquad u^2 + \delta v^2 + \frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin\omega}v + 1 = 0.$$

On en tire l'expression de ρ_1 en fonction de R, et aussi celle de R aux sommets de la courbe pour lesquels $\rho_1 = 0$, savoir :

$$(30)\qquad R = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin\omega}\left[\frac{2h\cos\omega-(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4h^2+4(a+b)h\cos\omega}}{2\delta}\right]^{\frac{3}{2}}$$

L'élimination de ρ_1 entre (26) et (27) donne de même

$$\frac{\rho_2}{3R} = -\left(3 + 4\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin\omega}v + 5\delta v^2\right).$$

Par des différentiations successives, on pourrait obtenir de même $\frac{\rho_3}{\rho_1}$, $\frac{\rho_4}{R}$, $\frac{\rho_5}{\rho_1}$, ... en fonction de v, c'est-à-dire de $R^{\frac{2}{3}}$; et, si l'on élimine v entre deux de ces relations, on pourra obtenir une relation où n'entrera plus R et qui, par conséquent, s'appliquera, en augmentant tous les indices des ρ d'une unité, aux développées successives de la conique caractérisée par les valeurs données aux constantes arbitraires a, b, h.

On peut donner à ces équations une forme plus élégante en remarquant que l'aire S de la conique et celle Γ de son cercle orthoptique ont respectivement pour expressions

$$(31)\qquad S = \frac{\pi\Delta\sin\omega}{\delta^{\frac{3}{2}}},\qquad \Gamma = -\frac{\pi\Delta(a+b-2h\cos\omega)}{\delta^2}.$$

Soient alors C, C_1, C_2 les aires des cercles de courbure en un point arbitraire de la conique et aux points correspondants de la première et de la seconde développée. Les équations (26) et (27) pourront s'écrire [1]

$$(32)\qquad 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_2}{C}} + \frac{4}{9}\frac{C_1}{C} - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

$$(33)\qquad 2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_2}{C}} + \frac{5}{9}\frac{C_1}{C} - \frac{C^{\frac{1}{3}}\Gamma}{S^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

et l'équation (28)

$$(34)\qquad \frac{1}{9}\frac{C_1}{C} + \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\Gamma}{S} + 1 = 0.$$

Ces diverses formules permettent de résoudre des problèmes tels que celui-ci :

On donne les équations (finies) de deux coniques quelconques. Si on les déplace, sans les déformer, de manière à les amener à avoir quatre points consécutifs communs, quelles seront les valeurs communes de R *et de* ρ_1 *au point de contact? Et quelle condition doit être remplie pour que le problème soit possible?*

En se reportant à l'équation (34), il est clair que, aux points qui doivent venir en contact, C et C_1 doivent avoir la même valeur pour les deux coniques; si S et Γ sont les caractéristiques de l'une, S′ et Γ′ celles de l'autre, on aura, avec l'équation (34), celle-ci:

$$(34\ bis)\qquad \frac{1}{9}\frac{C_1}{C} + \left(\frac{C}{S'}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{C}{S'}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\Gamma'}{S'}\right) + 1 = 0,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(35)\qquad C = \frac{\left(\Gamma' S^{\frac{4}{3}} - \Gamma S'^{\frac{4}{3}}\right)^3}{S^2 S'^2\left(S'^{\frac{2}{3}} - S^{\frac{2}{3}}\right)^3},$$

---

[1] La relation (32) figure déjà sous le n° (20) dans ma Note précitée.

ou, remplaçant S, S′, Γ, Γ′ par leurs valeurs (31) et C par πR^2,

$$(36)\qquad R = \frac{\sqrt{\Delta\Delta'}}{\sin\omega}\left[\frac{(a'+b'-2h'\cos\omega)\,\Delta^{\frac{1}{3}}-(a+b-2h\cos\omega)\,\Delta'^{\frac{1}{3}}}{\delta\,\Delta'^{\frac{2}{3}}-\delta'\,\Delta^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que

$$\Delta\Delta'\,\frac{(a'+b'-2b'\cos\omega)\,\Delta^{\frac{1}{3}}-(a+b-2h\cos\omega)\,\Delta'^{\frac{1}{3}}}{\delta\,\Delta'^{\frac{2}{3}}-\delta'\,\Delta^{\frac{2}{3}}} > 0$$

et que, en outre, R calculé par la formule (36) soit, pour chacune des deux coniques, compris entre le maximum et le minimum qui lui conviennent.

Si les cercles orthoptiques des deux coniques sont égaux, la formule (35) devient

$$(37)\qquad \left(\frac{C}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\Gamma}{S}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\Gamma}{S'}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour terminer, je donnerai l'équation différentielle intrinsèque des coniques semblables, correspondant à l'équation différentielle ordinaire (22). Ici $\frac{\Gamma}{S}$ doit avoir une valeur constante; mais

$$\frac{\Gamma}{S} = -\frac{(a+b-2h\cos\omega)}{\delta^{\frac{1}{2}}\sin\omega}.$$

Comparant avec (25) et (27), il vient

$$(38)\qquad (18R^2 - 3R\rho_2 = 5\rho_1^2)^2 = 9\,\frac{\Gamma^2}{S^2}\,R^2(9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2),$$

ce qu'on peut écrire plus simplement

$$(39)\qquad S^2\mathfrak{H}^2 - 9\Gamma^2\mathfrak{L}^2\mathfrak{L}' = 0,$$

en désignant par $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{L}' = 0$ les équations différentielles intrinsèques des hyperboles équilatères, des points ($R = 0$) et des paraboles. Si ces coniques semblables sont des cercles, pour lesquels $\rho_1 = \rho_2 = 0$, l'équation (38) exige que $\Gamma^2 = 4S^2$, comme cela devait être.