

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

## **Sur quelques propriétés des matrices hypohermitiennes $n$ -aires**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 31 (1903), p. 268-271

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1903\\_\\_31\\_\\_268\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__268_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES HYPOHERMITIENNES**  
*n*-aires;

Par M. L. AUTONNE.

1° Je me propose de compléter certains résultats énoncés dans mes publications antérieures :

I. — *Sur l'Hermitien* (Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme, 1902).

II. — *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1902).

III. — *Sur l'Hypohermitien* (même Recueil, 1903).

IV. — *Sur la canonisation des formes bilinéaires* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1903).

Je supposerai aussi connues du lecteur les propriétés des matrices bilinéaires telles que les a exposées M. Frobenius dans ses remarquables travaux, notamment :

V. — *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (J. f. r. u. a. M., t. 84, p. 1).

VI. — *Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* (Sitzungsberichte de l'Académie des Sciences de Berlin, 1896, p. 7) <sup>(1)</sup>.

2° Soit A une hypohermitienne *n*-aire. L'équation caractéristique  $\textcircled{\Omega}$

$$|x\mathbf{E} - \mathbf{A}| = (x - a)^g(x - b)^h(x - c)^k \dots = 0,$$

$$n = g + h + k + \dots$$

aura *l* racines *distinctes* *a, b, c, ...* Les successifs (*Elementartheiler*) seront tous simples et seront  $x - a, \dots, x - b, \dots, x - c, \dots$

Enfin les racines *a, b, c, ...* de  $\textcircled{\Omega}$  seront des nombres réels, positifs ou nuls.

Désignons par  $\psi(x)$  le polynome

$$\psi(x) = x^l + \dots = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

L'équation de degré minimum à laquelle satisfait la matrice A est  $\psi(\mathbf{A}) = 0$ . Toute fonction rationnelle  $f(\mathbf{A})$  peut, sous le bénéfice de  $\psi(\mathbf{A}) = 0$ , s'écrire

$$f(\mathbf{A}) = d_0 \mathbf{A}^{l-1} + d_1 \mathbf{A}^{l-2} + \dots + d_{l-2} \mathbf{A} + d_{l-1} \mathbf{E};$$

le polynome  $f(x)$  est

$$f(x) = d_0 x^{l-1} + \dots + d_{l-2} x + d_{l-1}.$$

Comme les successifs sont tous simples pour l'hypohermitienne A, le *cas d'exception* (V, p. 25, théorème V) ne se présente pas. L'équation caractéristique afférente à  $f(\mathbf{A})$  sera

$$|x\mathbf{E} - f(\mathbf{A})| = [x - f(a)]^g [x - f(b)]^h \dots = 0,$$

et les successifs, encore tous simples, seront

$$x - f(a), \quad x - f(b), \quad x - f(c), \quad \dots$$

A et  $f(\mathbf{A})$  admettent évidemment les mêmes canonisantes et, si A a été canonisée, il en est de même pour  $f(\mathbf{A})$ .

<sup>(1)</sup> Je renverrai à cette liste simplement en rappelant le chiffre romain qui désigne chaque travail.

3° Tout cela posé, passons à la première question, qui nous occupera :

*Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $f(A)$  soit aussi une hypohérmittienne?*

Comme  $A$  et  $f(A)$  se laissent en même temps canoniser par une même *canonisation unitaire*, il faut et il suffit évidemment, pour rendre  $f(A)$  hypohérmittienne, que les quantités

$$f(a), f(b), f(c), \dots$$

soient réelles et non négatives.

Le rang  $q$  d'une hypohérmittienne  $n$ -aire est donné par la relation :  $n - q =$  le nombre des racines nulles dans l'équation caractéristique.

Ce rang  $q$  est, en général, différent pour  $f(A)$ .

4° Voici maintenant le second problème qui nous occupera.

J'ai démontré (III) que,  $A$  étant une hypohérmittienne  $n$ -aire quelconque, il existait toujours une et une seule hypohérmittienne

$B = A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}$  telle que  $B^m = A$ ;  $m =$  entier positif. La méthode donnée pour la construction de  $B$  est fondée sur la canonisation préalable de  $A$  et n'est satisfaisante qu'en théorie. Le calcul direct devient bien vite impraticable (*voir*, par exemple, I, 26°, le cas  $m = n = 2$ ).

On va chercher s'il est possible d'exprimer  $A^{\frac{1}{m}}$  par une fonction rationnelle  $f(A)$  (2°).

Nommons  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les nombres réels et non négatifs, qui sont les racines  $m^{\text{ièmes}}$  arithmétiques de  $a, b, c, \dots$ . En vertu de ce qui précède, il suffit de faire

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad f(c) = \gamma, \quad \dots,$$

c'est-à-dire de définir les coefficients  $d_r$  du polynôme  $f$  par les  $l$  relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_r d_r a^{l-1-r} = \alpha, \\ \sum_r d_r b^{l-1-r} = \beta, \\ \dots\dots\dots, \\ r = 0, 1, \dots, l-1, \end{array} \right.$$

où le déterminant des  $l$  inconnues  $d_r$  est  $\neq 0$ , puisque les  $l$  racines  $a, b, c, \dots$  sont toutes distinctes.

Ce calcul des  $d_r$  se résume d'ailleurs dans une formule unique

$$(2) \quad 0 = \begin{vmatrix} A^{l-1} & A^{l-2} & \dots & A^2 & A & E & A^{\frac{1}{m}} \\ a^{l-1} & a^{l-2} & \dots & a^2 & a & 1 & \alpha \\ b^{l-1} & b^{l-2} & \dots & b^2 & b & 1 & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

obtenue en éliminant les  $l$  inconnues  $d_r$  entre les  $l$  relations (1) et

$$(A) = A^{\frac{1}{m}}.$$

5° Comme application facile, extrayons la racine carrée d'une hermitienne binaire  $H$ , de déterminant  $un$ . C'est le cas  $m=n=2$  (déjà traité, I, 26°).

Il viendra

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad |H| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1;$$

$$\psi(x) = |xE - H| = x^2 - x(h_{11} + h_{22}) + 1 = (x - a)(x - b);$$

$$ab = \alpha\beta = 1.$$

La formule (2) donne, après départ de  $x - \beta$ ,

$$\begin{vmatrix} H & E & H^{\frac{1}{2}} \\ \alpha & 1 & \alpha \\ b & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

$$H^{\frac{1}{2}} = \frac{H + E}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} h_{11} + 1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} + 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\tau = (\alpha + \beta)^{-1};$$

il viendra

$$\tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 = h_{11} + h_{22} + 2,$$

car

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2; \quad ab = \alpha\beta = 1; \quad a + b = h_{11} + h_{22}.$$

Cela est bien d'accord avec le calcul ancien (I, 26°).