L. LECORNU

Propriétés géométriques des milieux continus

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 258-268
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__258_1>

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES MILIEUX CONTINUS;

Par M. L. Lecornu.

Toute équation $\varphi(x, y, z) = C$ dans laquelle C désigne une constante arbitraire définit une famille de surfaces; mais la réciproque n'est pas vraie, et une même famille de surfaces correspond à une infinité d'équations obtenues en remplaçant φ par une fonction arbitraire de φ. Si l'on veut avoir une représentation adéquate de l'équation $\varphi = C$, il faut considérer une variable de plus et imaginer, par exemple, un milieu matériel dans lequel $\varphi(x, y, z)$ serait la densité au point (x, y, z). Les surfaces $\varphi = C$ sont alors les surfaces d'égale densité. Parmi les propriétés d'un pareil milieu, les unes se confondent avec les propriétés purement géométriques du système de surfaces et demeurent invariables, quelle que soit la loi de variation de la densité dans le passage d'une surface à une autre; les autres dépendent essentiellement de cette *loi de distribution*.

Je me propose d'établir ici quelques théorèmes de géométrie infinitésimale concernant ces deux sortes de propriétés.

L'origine O des coordonnées rectangulaires étant placée en un point de la région élémentaire qu'on veut étudier, nous considérerons x, y, z comme des infiniment petits du premier ordre, et nous écrirons, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$(1)\quad \varphi = \varphi_0 + px + qy + rz + \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy).$$

Posons

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

L'équation

$$(2)\qquad f(x, y, z) = \varepsilon,$$

dans laquelle ε désigne une constante arbitraire, représente une quadrique à centre, que j'appellerai la *surface indicatrice*, ou simplement l'*indicatrice* du système, et que je désignerai par I. Cette indicatrice ne change pas quand, laissant ε invariable, on modifie la direction des *axes*. On pourrait le vérifier par un calcul direct, mais on le voit géométriquement de la manière suivante : Soient A et B deux points symétriques par rapport à l'origine. La moyenne des densités en ces deux points est évidemment $\varphi_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$. La surface I est donc le lieu des points tels que la moyenne des densités en l'un de ces points et au point symétrique par rapport à O possède une valeur donnée, et cette définition est indépendante du choix des axes.

Les directions principales de l'indicatrice ont une signification mécanique assez remarquable. Orientons les axes de coordonnées suivant ces directions, de manière à annuler les coefficients f, g, h. Si l'on calcule alors les intégrales $\int yz\varphi\, d\omega$, $\int zx\varphi\, d\omega$, $\int xy\varphi\, d\omega$ étendues à tous les éléments $d\omega$ d'une sphère infiniment petite de centre O, on reconnaît immédiatement que ces intégrales sont nulles. Par suite :

Les axes de l'indicatrice coïncident en direction avec les axes principaux d'inertie d'une sphère infiniment petite appartenant au milieu considéré.

J'ai démontré cette proposition, avec plusieurs autres du même genre, dans une Note communiquée à l'Association française pour l'avancement des Sciences (1890).

Soit S la surface d'égale densité passant au point O. Son *indicatrice de Dupin* est, par définition, sa courbe d'intersection avec un plan parallèle au plan tangent en O et infiniment voisin. Pour tous les points de cette ligne, l'expression $px+qy+rz$ a une valeur constante; en même temps, φ est égal à φ_0. La comparaison des équations (1) et (2) montre alors que, pour tous les points de l'indicatrice de Dupin, la quantité ε a une valeur constante. En d'autres termes :

La surface indicatrice contient la courbe indicatrice de Dupin.

Si nous cherchons l'intersection de la surface indicatrice $f(x, y, z) = \varepsilon$ avec le plan tangent lui-même P, nous trouvons que cette courbe appartient à la surface d'égale densité $\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$ infiniment voisine de la surface passant en O. Cette courbe est infiniment peu différente de l'indicatrice de Dupin, et c'est elle que nous désignerons désormais sous le nom de *courbe indicatrice*.

En modifiant la loi de distribution des densités, c'est-à-dire en remplaçant φ par une fonction $F(\varphi)$, on fait varier la forme de la surface indicatrice. A un système donné de surfaces d'égale densité S correspond donc, pour chaque point de l'espace, une infinité de surfaces indicatrices. Si l'on appelle F' et F'' les dérivées première et seconde de $F(\varphi)$, l'équation générale des surfaces indicatrices qui correspondent au point O est

$$F'f(x, y, z) + F''(px+qy+rz)^2 = \eta.$$

L'intersection avec le plan P est donnée par $F'f = \eta$, et, en déterminant la constante arbitraire η par la condition $F'\varepsilon = \eta$, toutes les surfaces indicatrices passent par la même courbe indicatrice le long de laquelle elles sont tangentes entre elles.

Si l'on fait en particulier $\varepsilon = 0$, toutes les surfaces indicatrices se réduisent à des cônes coupant le plan P suivant deux droites fixes, réelles ou imaginaires, qui sont les tangentes aux lignes asymptotiques de S ; ce sont les *cônes indicateurs*.

La direction conjuguée du plan P est la même pour toutes les surfaces indicatrices. Elle est définie par les équations

$$(3) \qquad \frac{ax+hy+gz}{p} = \frac{hx+by+fz}{q} = \frac{gx+fy+cz}{r}.$$

Pour un déplacement effectué, à partir de l'origine O, suivant cette direction, on a évidemment

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dr}{r};$$

cela revient à dire que p, q, r conservent des rapports invariables et que, par suite, l'orientation du plan P n'est pas changée. La direction dont il s'agit est donc celle de la droite joignant les points de contact de deux plans tangents menés parallèlement à deux surfaces S infiniment voisines. Nous appellerons cette droite l'*axe de parallélisme*. Parmi tous les cônes indicateurs, il y en a un qui contient l'axe de parallélisme et se décompose, par suite, en deux plans.

Extension du théorème des tangentes conjuguées.

Soient X, Y, Z les coordonnées courantes. L'équation du plan tangent à l'une des surfaces S en un point $A(x, y, z)$ infiniment voisin de l'origine est, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} p(X-x) + q(Y-y) + r(Z-z) + aXx + bYy + cZz \\ + f(Yz+Zy) + g(Zx+Xz) + h(Xy+Yx) = 0. \end{aligned}$$

Sa trace sur le plan P, tangent en O, dont l'équation est $pX + qY + rZ = 0$, vérifie la relation

$$(aX+hY+gZ-p)x+(hX+bY+fZ-q)y+(gX+fY+cZ-r)z = 0.$$

On reconnaît ici l'équation du plan diamétral conjugué de la direction OA par rapport à la quadrique

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2fYZ+2gZX+2hXY-2(pX+qY+rZ) = 0,$$

tangente en O au plan P.

La caractéristique du plan tangent, pour un déplacement OA du point de contact, est donc la polaire de OA par rapport à cette quadrique Q. Elle est parallèle à la trace sur le plan P du plan diamétral conjugué de OA par rapport à l'une quelconque des surfaces indicatrices.

Le centre de la surface Q se trouve sur l'axe de parallélisme, au point défini par les équations

$$\begin{aligned} aX + hY + gZ - p &= 0, \\ hX + bY + fZ - q &= 0, \\ gX + fY + cZ - r &= 0. \end{aligned}$$

La quadrique Q est tangente en O à la surface S. Elle admet la même indicatrice de Dupin et elle est symétrique, par rapport à O, de la quadrique

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fYZ + 2gZX + 2hXY + 2(pX + qY + rZ) = 0,$$

déduite de la surface S en effaçant, dans le développement de $\varphi - \varphi_0$, les termes d'ordre supérieur au second.

En particulier, pour un déplacement OA normal en O à la surface S, la construction précédente fait connaître la caractéristique de la trajectoire orthogonale des surfaces S, c'est-à-dire l'axe de courbure de cette trajectoire.

En faisant varier la loi de distribution des densités, on obtient une infinité de quadriques Q dont les centres se trouvent tous sur l'axe de parallélisme et qui se touchent toutes au point O. Ces quadriques sont évidemment homologiques.

Normalies développables.

Cherchons maintenant pour quels déplacements OA effectués à partir de O la normale en A à la surface S passant en ce point rencontre la normale en O à la surface initiale et engendre, par suite, un élément de surface développable. Les équations de la normale en un point x, y, z pour lequel p, q, r désignent les paramètres du plan tangent peuvent s'écrire

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{r} = \lambda,$$

d'où

$$X = x + \lambda p, \qquad Y = y + \lambda q, \qquad Z = z + \lambda r. \tag{4}$$

Si l'on veut que deux normales infiniment voisines se rencontrent, on est conduit aux équations

$$\left\{ \begin{aligned} dx + \lambda\, dp + p\, d\lambda &= 0, \\ dy + \lambda\, dq + q\, d\lambda &= 0, \\ dz + \lambda\, dr + r\, d\lambda &= 0, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

d'où, par l'élimination de λ et $d\lambda$,

$$\begin{vmatrix} dx & dp & p \\ dy & dq & q \\ dz & dr & r \end{vmatrix} = 0.$$

Appliquons ceci à l'origine O et remplaçons alors dx, dy, dz par x, y, z, puis dp, dq, dr par $ax + hy + gz$, ... Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} x & ax + hy + gz & p \\ y & ax + by + fz & q \\ z & yx + fy + cz & r \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Il est aisé de reconnaître que la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2 est identiquement nulle et que, par suite, le cône du second degré C représenté par l'équation précédente est *capable* d'une infinité de trièdres trirectangles. Ce cône admet comme génératrices plusieurs droites remarquables, savoir :

1° L'axe de parallélisme (3);

2° La normale à la surface S $\left(\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}\right)$;

3° Les tangentes aux lignes de courbure;

4° Les droites pour lesquelles

$$\frac{ax + hy + gz}{x} = \frac{hx + by + fz}{y} = \frac{gx + fy + cz}{z},$$

c'est-à-dire les axes principaux de l'indicatrice I.

En modifiant la loi de distribution des densités, on n'altère pas le cône C, ainsi qu'il est aisé de le vérifier directement. Les axes principaux de toutes les indicatrices se trouvent donc sur ce cône et, par conséquent :

Le lieu des tangentes aux directrices des normalies développables en chaque point de l'espace est le cône du second degré formé par les axes principaux de toutes les indicatrices.

Remarquons encore que l'équation (6) est suceptible d'une interprétation géométrique évidente : le plan mené par une génératrice du cône, normalement à la surface S, contient la normale au plan diamétral conjugué de cette génératrice par rapport à l'une quelconque des indicatrices. Il en résulte que, pour un déplacement effectué à partir de O suivant une génératrice, la caractéristique du plan tangent à la surface S est perpendiculaire au déplacement, ainsi qu'il était d'ailleurs facile de le prévoir.

Cherchons le plan tangent au cône C le long de la normale en O à la surface S. Si $\psi(x, y, z) = o$ est l'équation du cône, ce plan tangent a pour équation $x\psi'(p) + y\psi'(q) + z\psi'(r) = o$, ce qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & ap + hq + gr & p \\ y & hp + bq + fr & q \\ z & gp + fq + cr & r \end{vmatrix} = o.$$

Ce plan contient la direction

$$\frac{x}{ap + hq + gr} = \frac{y}{hp + bq + fr} = \frac{z}{gp + fq + cr},$$

qui appartient évidemment au plan osculateur en O à la trajectoire orthogonale des surfaces S. Donc :

Le cône des axes principaux est tangent le long de la normale (p, q, r) au plan osculateur de la trajectoire orthogonale des surfaces S.

Courbures normales.

Soient ON, AN′ les normales à deux surfaces S, en deux points infiniment voisins O et A. Projetons AN′ sur le plan normal NOA, et cherchons les coordonnées X, Y, Z du point de rencontre B de cette projection avec la normale ON. Si les deux points O et A se trouvaient sur une même surface S, le point ainsi obtenu serait le centre de courbure de la section de la surface par le plan normal contenant OA. Notre calcul va donc constituer l'extension, à un système de surfaces, de la théorie de la courbure.

En appelant x, y, z les coordonnées de A et $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$ les valeurs de p, q, r en ce point, on exprime que le plan de AN′ et AB est normal au plan NOA par l'équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ p + dp & q + dq & r + dr \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, si l'on pose $OB = R$ et $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega$, on a

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} = \frac{R}{\omega};$$

d'où, en substituant, dans l'équation précédente, et simplifiant

$$\frac{R}{\omega}\begin{vmatrix} p & q & r \\ dp & dq & dr \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ qz - ry & ry - pz & py - qx \end{vmatrix}.$$

En remplaçant dp, dq, dr par leurs valeurs $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}$, on obtient finalement

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}(px + qy + rz)\left(p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} + r\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \omega^2 f(x, y, z)}{\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) - \omega(px + qy + rz)^2}.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de OA. On peut encore écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}(p\alpha + q\beta + r\gamma)\left(p\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\frac{\partial f}{\partial \beta} + r\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) - \omega^2 f(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega^3 - \omega(p\alpha + q\beta + r\gamma)^2}.$$

Si l'on appelle enfin i l'angle de OA avec la normale ON, il vient

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}\cos i\left(p\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\frac{\partial f}{\partial \beta} + r\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) - \omega f(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega^2 \sin^2 i}.$$

Pour $i = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la formule ordinaire donnant la courbure des sections normales d'une surface.

Portons sur chaque direction OA un vecteur égal à $\frac{\sqrt{R}}{\sin i}$; le lieu de l'extrémité de ce vecteur est une quadrique à centre. De là résultent diverses relations, parmi lesquelles je signalerai seulement la suivante :

Pour trois directions rectangulaires quelconques OA_1, OA_2, OA_3 *issues du point* O, *l'expression* $\frac{\sin^2 i_1}{R_1}+\frac{\sin^2 i_2}{R_2}+\frac{\sin^2 i_3}{R_3}$ *a une valeur constante.*

La valeur de cette constante est

$$\frac{f(p,q,r)-(p^2+q^2+r^2)(a+b+c)}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle doit naturellement être indépendante de la loi de distribution des densités; c'est ce qu'on vérifie sans peine par un calcul direct.

Si l'on considère en particulier le trièdre formé par la normale à la surface S et par les directions principales de cette surface, la valeur de $\frac{\sin^2 i}{R}$ correspondant à la normale est nulle; pour les deux directions principales, $\sin i$ est égal à l'unité. La constante dont il s'agit ne diffère donc pas de la somme des inverses des rayons de courbure de la surface S, c'est-à-dire du double de sa courbure moyenne. Il est remarquable que la courbure moyenne d'une seule surface S détermine ainsi, d'une manière complète, la valeur de l'expression $\sum\frac{\sin^2 i}{R}$ relative à trois directions rectangulaires quelconques, issues d'un point de cette surface, indépendamment de la forme des surfaces S infiniment voisines.

Le lieu des directions pour lesquelles R a une valeur infinie est le cône asymptotique représenté par l'équation

$$(px+qy+rz)\left(p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}+r\frac{\partial f}{\partial z}\right)-2(p^2+q^2+r^2)f(x,y,z)=0.$$

ou bien

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} p & q & r \\ ax+hy+gz & hx+by+fz & gx+fy+cz \\ qz-ry & rx-pz & py-qx \end{vmatrix}=0.$$

Ce cône contient la normale en O à S et l'axe de parallélisme; il coupe le plan tangent à la surface S suivant les deux directions asymptotiques.

Pour un déplacement effectué suivant une génératrice quelconque de ce cône, la caractéristique du plan tangent est parallèle à la trace du plan normal contenant le déplacement.

Courbure de la trajectoire orthogonale.

Nous avons précédemment déterminé l'axe de courbure de la trajectoire orthogonale des surfaces S. On pourrait en déduire son rayon de courbure ρ; mais il vaut mieux traiter la question directement. A cet effet, menons par l'origine O la normale ON, rencontrant en N une surface S' infiniment voisine de S. Menons aussi l'axe de parallélisme OA, rencontrant en A la même surface S'. La déviation du plan tangent aux surfaces S est la même lorsqu'on parcourt le chemin AN sur la surface S' que lorsqu'on va de O en N suivant la normale. D'ailleurs, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de S' au point N (infiniment peu différent des rayons de courbure de S au point O) et si ψ désigne l'angle du plan AON avec le plan de la section principale correspondant au rayon R_1, l'angle α des normales en N et en A est donné par la formule connue

$$\frac{\alpha^2}{\mathrm{AN}^2} = \frac{\cos^2\psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{R_2^2}.$$

Soit θ l'angle AON. On a $\mathrm{AN} = \mathrm{AO}\tang\theta$ et $\frac{\alpha}{\mathrm{AO}} = \frac{1}{\rho}$.

Le rayon de courbure ρ de la trajectoire orthogonale vérifie donc la formule

$$\frac{1}{\rho^2} = \tang^2\theta\left(\frac{\cos^2\psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{R_2^2}\right).$$

Il est entièrement défini par les rayons de courbure de la surface S et par la direction de l'axe de parallélisme.

Je me suis borné, dans cette étude, aux propriétés dépendant des dérivées premières et secondes de la fonction φ. Si l'on voulait aller plus loin, on serait conduit à aborder des problèmes beaucoup plus ardus. A la fonction φ sont liées, en chaque point de l'espace, trois directions rectangulaires, correspondant aux axes principaux de l'indicatrice. On peut tout d'abord se demander quelle condition doit remplir la fonction pour que ces directions soient normales à un système triple de surfaces orthogonales.

Cette question (énoncée sous une forme un peu différente) a été résolue par M. Darboux dans les *Proceedings of the London mathematical Society de* 1900. Il a trouvé que la fonction doit vérifier une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, homogène, ne contenant ni la fonction, ni ses dérivées premières. Imaginons maintenant que nous changions la loi de distribution sans altérer les surfaces d'égale densité. Nous modifions, en chaque point, l'orientation du trièdre trirectangulaire. Dans quels cas ce nouveau trièdre demeure-t-il normal à un système triple de surfaces orthogonales?

Au lieu de se donner la fonction φ et d'en déduire les directions principales en chaque point, on peut inversement se donner ces dernières, puis chercher dans quels cas il existe une fonction φ correspondante, et quelle est alors cette fonction.

On multiplierait sans peine les questions de ce genre; mais il est plus aisé de les imaginer que de les résoudre.