BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SALTYKOW

Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonctions inconnue

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 224-229
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__224_1>

SUR L'EXISTENCE DES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME COMPLET D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION INCONNUE;

Par M. N. Saltykow.

Considérons un système *complet* [1] de m équations

$$(1)\qquad \begin{cases} p_k = \mathrm{H}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n), \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

où les fonctions H_1, H_2, ..., H_m sont holomorphes dans le voisinage des valeurs zéro des quantités x_1, x_2, ..., x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, ..., p_n considérées comme des variables indépendantes. Cela étant, le théorème de Cauchy démontre *l'existence d'une intégrale z du système* (1) *holomorphe dans le domaine du point* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *et telle que les valeurs*

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, *deviennent identiques à*

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

f étant une fonction des variables x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n arbitraire, mais holomorphe aux environs du point

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0,$$

---

(1) Cf *Journal de Mathématiques*, 1899, p. 436.

s'annulant pour ce dernier, ainsi que toutes ses dérivées du premier ordre.

La démonstration de ce théorème, qui va être exposée, est fondée sur l'introduction de la notion de *fonction majorante* du système (1).

Il est aisé de représenter le développement de l'intégrale en question par la série de Maclaurin (¹),

$$z = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Notre problème revient alors à démontrer la convergence absolue et uniforme de cette dernière série.

Les fonctions H_1, H_2, ..., H_m étant développables en séries de Maclaurin aux environs des valeurs zéro des variables x_1, x_2, ..., x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, ..., p_n, soient r le plus grand des modules de ces dernières et M le plus grand des modules des fonctions H_k dans le domaine considéré; désignons enfin par ρ et N les valeurs analogues relatives à la fonction f. Cela posé, les fonctions

$$\frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + z + p_{m+1} + p_{m+2} + \ldots + p_n}{r}},$$

$$(2) \qquad \frac{N}{\rho} \cdot \frac{(x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n)^2}{\rho - (x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n)}$$

sont développables, dans le même domaine, en séries de Maclaurin, dont les termes sont supérieurs aux termes correspondants des séries représentant les fonctions H_k et f.

Formons ensuite le système complet

$$(3) \qquad P_k = H, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

P_k désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Z par rapport aux variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n et H représentant la fonction

$$H = \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + Z + P_{m+1} + P_{m+2} + \ldots + P_n}{r}}.$$

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, 1891, p. 178-179. — DELASSUS, *Leçons sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 20-21.

On voit aisément que notre problème revient à calculer une intégrale Z du système (3) holomorphe aux environs du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, telle que les quantités

$$Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_n},$$

deviennent, au point $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, égales aux valeurs correspondantes de la fonction (2) et de ses dérivées premières par rapport aux mêmes variables indépendantes.

Si l'on met le système (3) sous la forme suivante,

$$\begin{gathered} P_k - P_1 = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, m, \\ P_1 = H, \end{gathered}$$

l'intégrale générale des équations de la première ligne est

$$Z = F(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n),$$

F étant une fonction arbitraire. Par conséquent, en introduisant les notations

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = x, \qquad x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n = y,$$

on parvient à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre p et q d'une fonction u par rapport aux variables indépendantes x et y,

$$(4) \qquad [x + y + u + (n - m)q - r]p + Mr = 0,$$

dont il s'agit de trouver une intégrale u holomorphe aux environs du point $x = y = 0$, telle que, pour $x = 0$, la fonction u et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$ deviennent respectivement identiques à

$$\frac{N}{\rho} \cdot \frac{y^2}{\rho(\rho - y)}, \quad \frac{N}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{\rho(\rho - y)}\right].$$

Ce dernier problème a été résolu par M. Königsberger [1]. Le résultat requis s'obtient aisément si l'on transforme l'équation (4) en prenant p comme nouvelle variable indépendante, au lieu de x, et en introduisant, au lieu de u, la nouvelle fonction v définie par

---

[1] *J. Crelle*, Bd. 109, S. S. 273-277. — *Mathem. Ann.*, Bd. 42, S. 485.

l'équation

$$v = y + u - r - xp.$$

L'équation transformée devient alors linéaire,

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{(1+p)}{n-m}\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{1}{n-m}v + \frac{Mr}{(n-m)p} = 1,$$

dont l'intégrale demandée s'obtient sans difficulté.

Le seconde question que je veux aborder à présent concerne l'existence unique des intégrales définies par les conditions initiales du théorème de Cauchy. Nous allons voir [1] que, dans le domaine considéré, il n'existe point d'autres intégrales avec les mêmes conditions initiales que celles qui viennent d'être étudiées. En effet, supposons le contraire; soit z_1 une intégrale quelconque admettant les mêmes conditions initiales que l'intégrale z dont l'existence vient d'être démontrée, et distincte de cette dernière. Par conséquent, les identités suivantes ont lieu

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \mathrm{H}_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_k} = \mathrm{H}_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z_1}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z_1}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n}\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

En les retranchant les unes des autres et posant

$$z - z_1 = u,$$

on obtient, moyennant le théorème sur les accroissements finis, m identités nouvelles

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + \mathrm{A}_k u + \mathrm{B}_k \dfrac{\partial u}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \mathrm{L}_k \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

$\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k, \ldots, \mathrm{L}_k$ étant des fonctions des variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Comme z et z_1 admettent des dérivées des deux premiers ordres, les coefficients $\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k, \ldots, \mathrm{L}_k$ admettent des déri-

---

[1] La démonstration qui va suivre présente la généralisation de celle de M. Picard pour les équations différentielles ordinaires (*Traité d'Analyse*, t. II, n° 14, p. 314).

vées partielles du premier ordre par rapport aux variables indépendantes.

Par conséquent, les égalités (5) ayant lieu identiquement, la fonction $z - z_1$ est une intégrale des équations (5) et ces dernières forment un système jacobien. Donc, dans le domaine considéré, l'intégrale générale du système (5) renfermant toutes ses intégrales possibles, appartenant à ce domaine, est représentée par la formule suivante

$$u = e^{F}\,\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}),$$

Φ étant une fonction arbitraire. Les quantités

$$ue^{-F}, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-m}$$

désignent les $n - m + 1$ intégrales distinctes du système (5), la fonction F conservant une valeur finie, dans le domaine considéré, ainsi que ses dérivées du premier ordre par rapport aux variables indépendantes, et le déterminant fonctionnel

$$\text{(6)} \qquad D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n}\right) \gtrless 0,$$

étant distinct de zéro dans le même domaine.

D'après notre hypothèse, les quantités $u, \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial u}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ s'annulent pour les valeurs $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Donc, pour ces dernières valeurs, on a les identités

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{n-m}^0) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{m+r}}\right)_0 = 0, \\ \quad r = 1, 2, \ldots, n-m. \end{array} \right.$$

Moyennant l'inégalité (6), les $n - m$ dernières équations nous donnent les identités

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i^0} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Par conséquent, la fonction Φ est constante; de plus, en vertu de la première égalité (7), cette constante est nulle. Il s'ensuit que l'intégrale z_1 est identique à z; *donc, il n'existe qu'une seule intégrale définie par les conditions initiales du théorème étudié.*

La démonstration exposée se rapporte non seulement aux intégrales analytiques, mais évidemment encore à toutes les intégrales de Cauchy admettant des dérivées partielles des deux premiers ordres.