BULLETIN DE LA S. M. F.

C. A. LAISANT

Note sur un problème d'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 66-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__66_1>

NOTE SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION;

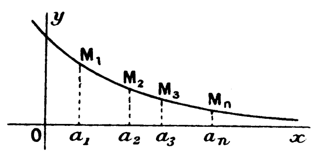
Par M. C.-A. Laisant.

Les questions d'interpolation se présentent dans l'application sous des apparences très variées. La plus simple d'entre elles se formule habituellement ainsi : connaissant un certain nombre de points, rapportés à un système de coordonnées cartésiennes, trouver une courbe qui passe par ces points. Parfois aussi, les points pouvant se grouper par couples, en tout ou en partie, on est amené à la recherche d'une courbe passant par des points donnés, et ayant des tangentes données en certains de ces points. Si, en particulier, les tangentes sont connues pour tous les points donnés, il s'agira, au point de vue analytique, de *déterminer une fonction qui prenne des valeurs données pour des valeurs données* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de la variable, et telle que sa dérivée prenne aussi, pour les mêmes valeurs de la variable, des valeurs données* (a).

Un problème de statistique, qui a fait l'objet d'une question récente dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, conduit à cette forme nouvelle : On donne les aires d'une courbe comprises entre l'axe des y, et les ordonnées correspondant à des abscisses $a_1, a_2, \ldots, a_n$ connues ; on donne en outre le moment de chacune de ces aires par rapport à l'axe des y, et l'on demande de déterminer la courbe (*fig.* 1).

Analytiquement, si l'on appelle $y = f(x)$ l'équation de la courbe cherchée, cela équivaut évidemment à demander de déter-

Fig. 1.



miner la fonction f, connaissant, pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ attribuées à x, les deux intégrales

$$\int_0^x f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^x x f(x)\,dx.$$

Je me propose de montrer que cette question se ramène très aisément à la résolution du problème (a) ci-dessus.

Soit en effet

$$\int_0^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x), \qquad \int_0^x x f(x)\,dx = \mathrm{G}(x),$$

et considérons la fonction

$$\int_0^x \mathrm{F}(x)\,dx = \mathrm{S}(x).$$

Nous avons

$$\mathrm{S}'(x) = \mathrm{F}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}(x) = x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x),$$

comme on le reconnaît immédiatement en prenant les dérivées, et en constatant que, pour $x = 0$, toutes les fonctions s'annulent. Des valeurs données $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ et $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n$, qui correspondent à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nous pouvons donc déduire

$$\mathrm{S}_1 = a_1\mathrm{F}_1 - \mathrm{G}_1, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{S}_n = a_n\mathrm{F}_n - \mathrm{G}_n.$$

Par conséquent, pour la fonction $S(x)$, nous connaissons ses valeurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$, et les valeurs de sa dérivée $F_1, F_2, \ldots, F_n$, pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la variable, c'est-à-dire que nous sommes bien ramenés au problème (a).

Cette fonction $S(x)$ étant déterminée par une formule d'interpolation quelconque, la fonction $f(x) = S''(x)$ résoudra le problème proposé.