BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BUHL

Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 47-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__47_1>

SUR LES SURFACES DONT UN SYSTÈME DE LIGNES ASYMPTOTIQUES SE PROJETTE SUIVANT UNE FAMILLE DE COURBES DONNÉE;

Par M. A. Buhl.

On voit facilement qu'on ne peut en général considérer deux familles de courbes prises arbitrairement dans le plan comme les projections des deux systèmes d'asymptotiques d'une surface.

Par contre une famille de courbes définie par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(xy) \tag{1}$$

peut toujours être considérée comme la projection d'un système d'asymptotiques d'une surface définie par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + f^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

C'est là une équation du type parabolique, linéaire et homogène, et d'ailleurs l'équation la plus générale de cette forme

$$A^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

peut toujours être considérée comme définissant une surface dont les asymptotiques d'un système se projettent suivant les courbes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}. \tag{4}$$

Aux variables x et y on peut toujours substituer de nouvelles variables s et t telles que l'équation (3) prenne la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \lambda \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

où λ est fonction de s et t (E. GOURSAT, *Leçons sur les équations du second ordre,* t. II, p. 39). Malheureusement, cette réduction n'avance pas beaucoup en général la question de l'intégration complète, sauf dans le cas où λ peut se réduire à une simple constante. L'équation (5) devient alors une équation bien connue; c'est celle de la propagation de la chaleur par conductibilité dans un espace à une dimension.

On sait qu'elle a été l'objet d'importants travaux de Fourier et d'un grand nombre de géomètres. Parmi les travaux récents on peut consulter l'article de M. P. APPELL : *Sur l'équation* $r - q = 0$ *et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques,* 1892, p. 187) et les leçons sur la *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* de M. POINCARÉ (C. Naud, éditeur, 1895).

Nous prendrons l'équation (5) sous la forme définitive

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

et nous allons rechercher comment l'on peut passer de l'équation (3) à l'équation (6) et quelles sont les conditions de possibilité d'une telle transformation.

En posant

$$X(z) = A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad Y(z) = X(A)\frac{\partial z}{\partial x} + X(B)\frac{\partial z}{\partial y},$$

l'équation (3) s'écrit

$$X^2(z) - Y(z) = 0. \tag{7}$$

et l'on voit qu'elle est ainsi formée avec les opérateurs X et Y, tout comme (6) est formée avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$.

Pour qu'il existe un changement de variables transformant en ces deux derniers X et Y, il faut et il suffit que ceux-là soient permutables (S. Lie und F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen,* t. I, p. 339). La condition $XY = YX$ nous donne facilement les deux équations

$$X^2(A) - Y(A) = 0, \qquad X^2(B) - Y(B) = 0$$

qui, comparées avec (7), nous montrent que : *L'équation* (3) *peut toujours être ramenée à la forme* (6) *si* A *et* B *en sont des solutions.*

Quant aux formules de transformation on les trouve en égalant à des constantes *arbitraires* les deux intégrales distinctes du système complet

$$(8) \qquad X(z) + \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \qquad Y(z) + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

La condition que nous venons de trouver paraît au premier abord très restrictive, mais on peut la remplacer par d'autres, ce qui provient du fait que l'équation primitive (3) peut se mettre sous la forme (7) de plusieurs manières différentes. Par exemple, si nous avions commencé par diviser l'équation par A^2, nous serions arrivés à cette conclusion que la constante 1 et l'expression $\frac{B}{A}$ doivent être des solutions. Comme la chose est évidemment réalisée pour la constante 1, nous voyons maintenant que *l'équation* (3) *se ramène à la forme* (6) *si* $\frac{B}{A}$ *en est une solution.* Même chose *si* $\frac{A}{B}$ *est solution.*

Si, au début, nous avions multiplié l'équation (3) par un facteur R^2, nous aurions conclu que, *si l'on peut trouver un facteur* R *tel que* RA *et* RB *soient des solutions, l'équation se ramène encore à la forme* (6). Le problème est encore résolu dans le même sens *si l'on connaît une solution* S *de* (3) *et que l'on constate que l'une des expressions* $S\frac{A}{B}$ *ou* $S\frac{B}{A}$ *est aussi une solution.*

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Les considérations qui précèdent nous mettent en mesure de déterminer un grand nombre de familles de courbes simples et intéressantes que l'on peut considérer comme les projections d'un système d'asymptotiques de certaines surfaces dont la connaissance ne dépend que de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Nous désignerons par $Z(s, t)$ une solution de cette équation ayant tel degré de généralité que l'on voudra.

Si nous nous en tenons au premier cas de réduction étudié précédemment, et si nous observons que les expressions linéaires à coefficients constants

$$A = a + cx + dy, \qquad B = b + ex + gy$$

sont manifestement des solutions de (3), nous voyons que toutes les familles de courbes comprises dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + ex + gy}{a + cx + dy} \tag{9}$$

sont les projections d'asymptotiques de surfaces que nous savons déterminer. Ces courbes sont les lignes invariantes des transformations projectives qui laissent en repos la droite de l'infini.

Pour leur étude détaillée je renvoie à l'Ouvrage de S. Lie et G. Scheffers : *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (p. 68), me bornant ici à rappeler ce qui est essentiel à mon sujet. Tout d'abord on voit facilement que, pour des valeurs particulières des coefficients constants, l'équation (9) donne les familles

$$y = \text{const.}, \quad y^2 - 2x = \text{const.}, \quad yx^{\alpha} = \text{const.}, \quad ye^{-x} = \text{const.} \tag{10}$$

C'est un théorème fondamental que la transformation homographique (groupe projectif) appliquée à ces quatre familles nous donne toutes les courbes invariantes du groupe projectif le plus général.

D'ailleurs, nos transformations changent aussi les asymptotiques d'une surface en les asymptotiques de la transformée et plus particulièrement la projection des premières en la projection des secondes.

Nous n'avons donc qu'à rechercher les surfaces admettant pour asymptotiques des familles se projetant suivant les types (10).

Premier type. — On trouve immédiatement des surfaces réglées à plan directeur et par transformation homographique des surfaces réglées quelconques. Les génératrices sont des asymptotiques qui évidemment se projettent suivant des droites.

Deuxième type. — Les courbes considérées sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}.$$

Nous avons facilement

$$A = y, \qquad B = 1,$$

et ensuite

$$X(z) = y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}; \qquad X(A) = 1, \qquad X(B) = 0, \qquad Y(z) = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Il nous faut maintenant intégrer le système complet

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Celui-ci admet les intégrales $y^2 - 2x + 2t$ et $y - s$, d'où les formules de transformation

$$s = C + y, \qquad t = C' + x - \frac{y^2}{2},$$

où C et C′ sont deux constantes arbitraires.

Donc la famille $y^2 - 2x = \text{const.}$ est la projection d'un système d'asymptotiques de la surface

$$z = Z\left(C + y, \quad C' + x - \frac{y^2}{2}\right). \tag{11}$$

Si par exemple nous prenons $Z(s, t) = s^3 + 6ts$, nous avons, pour $C = C' = 0$,

$$z = 6xy - 2y^3.$$

On vérifie facilement que cette surface admet des asymptotiques se projetant suivant la famille de paraboles indiquée et quant à celles de l'autre système, suivant des droites parallèles à l'axe des x; il s'agit donc d'une surface réglée à plan directeur.

En effectuant une transformation projective plane, nous déduirons de la surface (11) de nouvelles surfaces pour lesquelles le système d'asymptotiques considéré se projettera suivant la famille de courbes déduite, par la même transformation, des paraboles précédentes. Ces dernières ont leurs diamètres parallèles fixes en direction et touchent par suite la droite de l'infini en un point fixe; nous pouvons en déduire des coniques tangentes à une droite fixe quelconque en un point fixe quelconque et admettant une direction diamétrale arbitraire (*voir* S. Lie und G. Scheffers, *loc. cit.*, p. 74).

Troisième type. — La famille de courbes $yx^\alpha =$ const. résulte de l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha y}{x}.$$

Nous avons donc

$$A = x \qquad \text{et} \qquad B = -\alpha y,$$

d'où

$$X(z) = x\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha y\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad X(A) = x,$$

$$X(B) = \alpha^2 y, \qquad Y(z) = x\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha^2 y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Pour chercher la transformation qui change les opérateurs X et Y respectivement en $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, la méthode est la même que précédemment et le système complet à intégrer n'est pas plus compliqué. On trouve finalement

$$s = C + \frac{\alpha^2 \log x - \log y}{\alpha(\alpha+1)}; \qquad t = C' + \frac{\alpha \log x + \log y}{\alpha(\alpha+1)}.$$

L'équation $z = Z(s, t)$ représente alors les surfaces dont les asymptotiques d'un système se projettent suivant les courbes $yx^\alpha =$ const. Pour faire une application immédiate, soit $\alpha = 1$, $C = C' = 0$ et, en désignant par a une constante quelconque,

$$Z(s, t) = e^{2as + 4a^2 t}.$$

Nous obtenons alors la surface

$$z = x^{2a^2+a} y^{2a^2-a},$$

dont un système d'asymptotiques doit se projeter suivant la famille d'hyperboles équilatères $xy = \text{const.}$

Si nous cherchons directement les projections des deux systèmes d'asymptotiques de ladite surface, nous obtenons l'équation

$$(x\,dy + y\,dx)[(a+1)y\,dx + (a-1)x\,dy] = 0,$$

qui contient les hyperboles prévues et la seconde famille

$$x^{a+1}y^{a-1} = \text{const.}$$

Le type $yx^\alpha = \text{const.}$ est certainement le plus riche en cas particuliers remarquables. Les hyperboles $xy = \text{const.}$ nous donnent par une simple transformation linéaire toutes les coniques concentriques et homothétiques. Pour $\alpha = -2$, nous avons des paraboles de sommet et d'axe fixes dont le paramètre est variable et comme de telles paraboles sont aussi tangentes à la droite de l'infini en un point fixe, nous pouvons en conclure, par transformation homographique, toutes les coniques tangentes à deux droites fixes quelconques en deux points fixes quelconques.

La transformation linéaire qui change les axes de coordonnées en les droites isotropes nous change notre courbe type en

$$(x + iy)(x - iy)^\alpha = \text{const.},$$

ce qui est l'équation d'une famille de spirales logarithmiques homothétiques.

Enfin, toujours dans le même type, nous pouvons faire rentrer les courbes de la forme

$$(a_1x + b_1y + c_1)^{\lambda_1}(a_2x + b_2y + c_2)^{\lambda_2}(a_3x + b_3y + c_3)^{\lambda_3} = \text{const.},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

provenant de la transformation qui change en un triangle quelconque le triangle formé par les axes de coordonnées et la droite de l'infini. Ces courbes sont les intégrales de l'équation de Jacobi $P(x\,dy - y\,dx) + Q\,dy + R\,dx = 0$, où P, Q, R sont des fonctions linéaires des variables x et y.

Quatrième type. — La famille de courbes $ye^{-x} =$ const. provient de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Nous avons immédiatement

$$A = 1, \qquad B = y,$$

et ensuite

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad X(A) = 0, \qquad X(B) = y, \qquad Y(z) - y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

On trouve toujours de même les formules de transformation qui changent X et Y en $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$; ce sont :

$$s = C + x, \qquad t = C' + \log y - x.$$

Nous bornerons à ces quelques exemples très simples la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée. On voit que les cas qui se peuvent traiter sans faire intervenir d'équation aux dérivées partielles plus compliquée que (6) sont nombreux et non des moins intéressants.

Les surfaces cherchées étant connues, on peut se demander quelles sont les projections du second système d'asymptotiques. On obtient facilement pour leur équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2s}{t} - f(x, y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{r}{t}\frac{1}{f(x, y)}.$$

Ces deux équations sont absolument équivalentes, l'égalité de leurs seconds membres résultant immédiatement de l'équation aux dérivées partielles $r + 2sf + tf^2 = 0$ des surfaces déterminées.