BULLETIN DE LA S. M. F.

EDMOND MAILLET

Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé (troisième note)

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 27-47

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__27_1>

SUR LES FONCTIONS MONODROMES A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ

(TROISIÈME NOTE);

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Soit $F(z)$ une fonction monodrome dans une certaine région R comprenant tous les points du plan à l'extérieur d'un cercle Γ ayant pour centre l'origine, et qui n'a dans R qu'un point critique A à l'∞ (¹). F est développable dans R d'après la formule de Laurent (*fig.* 1)

$$F(z) = \varphi_0(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\varphi_0(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots,$$

$$\varphi(y) = B_1 y + \ldots + B_l y^l + \ldots.$$

La série $\varphi_0(z)$ a un rayon de convergence infini : c'est donc une fonction entière; dans la région R, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ reste fini et même tend vers o avec $\frac{1}{z}$. C'est la croissance de $\varphi_0(z)$ aux environs de $z = \infty$ qui détermine la croissance de $F(z)$ pour $z = \infty$.

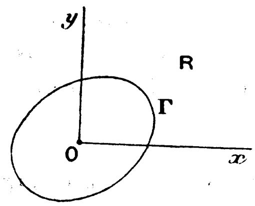
(¹) Le changement de variable $z = z_1 + a$ nous ramènera au cas où l'origine est en dehors de la courbe Γ. Le changement de variables $z = \frac{1}{z_2 - b}$ au cas d'une fonction monodrome dans une région limitée comprenant un point critique unique et essentiel.

Il sera donc naturel de classer la croissance de $F(z)$ comme celle de $\varphi_0(z)$ pour $z=\infty$. Si $\varphi_0(z)$ est d'ordre fini ρ, on dira que $F(z)$ est d'ordre fini ρ aux environs de $z=\infty$, et l'on aura

$$|F(z)| \leqq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε étant donné, fini et positif) si $r=|z|$ est suffisamment grand.

Fig. 1.



Si $\varphi_0(z)$ *est d'ordre infini, on dira que* $F(z)$ *est d'ordre infini; toute classification des ordres infinis* ([1]) *des fonctions entières s'appliquera aux fonctions* $F(z)$.

Nous dirons que $F(z)$ est une *fonction quasi-entière dans* R *pour* $z=\infty$.

En appliquant à $F(z)$ des raisonnements semblables à ceux de la théorie des fonctions entières et quasi-entières ([2]), nous lui étendrons : 1° le théorème de Weierstrass sur la représentation des fonctions entières par un produit infini; 2° ceux de M Borel sur les fonctions entières d'ordre fini à croissance régulière; 3° celui de Laguerre-Chio sur les racines de la dérivée d'une fonction entière réelle, d'ordre <2, et dont toutes les racines sont réelles; 4° enfin les théorèmes de MM. Picard et Borel sur la fréquence des racines des fonctions entières et méromorphes.

Nous retrouverons ainsi une démonstration du théorème bien connu de M. Picard sur les racines des équations $f(z)=a$ (a cons-

---

([1]) *Voir*, par exemple, Boutroux, *Comptes rendus*, 3 mars 1902 et notre Note des *Comptes rendus*, 9 février 1903.

([2]) *Voir*, par exemple, Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, et notre Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 329. Les fonctions étudiées ici comprennent évidemment les fonctions quasi-entières proprement dites. La lecture de notre Note, qui sera suivie par d'autres, exige seulement la connaissance des deux travaux ci-dessus et de notre Note des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1902, page 456.

tante quelconque) aux environs d'un point singulier essentiel.

Incidemment, nous établirons ce résultat :

Étant donné un contour C quelconque, soit

$$f(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l + \ldots$$

une fonction entière,

$$f_l(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l,$$

on peut toujours prendre λ assez grand pour qu'à toute racine de $f_l(z) = 0$ dans C ($\lambda \leqq l$) en corresponde dans C pour $f(z)$ une et une seule qui en diffère aussi peu qu'on veut.

II.

On sait que $F(z)$ n'a dans R que des zéros isolés. Soient dans R

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots,$$

les zéros de $F(z)$ rangés par ordre de modules croissants. On peut toujours former un produit canonique de facteurs primaires

$$P(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{K_n(z)}$$

convergent et ayant les mêmes zéros que $F(z)$ dans R : $P(z)$ est une fonction entière.

Considérons la fonction

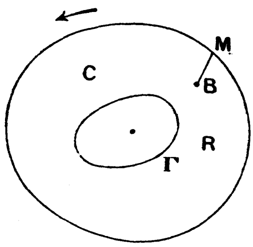
$$\frac{F(z)}{P(z)} = \Phi(z).$$

Elle n'a plus de zéros dans la région R où elle est monodrome; la fonction $\log \Phi$ n'a plus dès lors dans R que le point critique $z = \infty$. Soient

$$\Phi = \rho e^{i\psi},$$
$$\log \Phi = \log \rho + i(\psi + 2k\pi),$$

et deux points B et C de la région R. Étudions la variation de $\log \Phi$ quand on suit dans le plan des z un chemin quelconque allant de B en C et restant dans la région (*fig.* 2). Ce chemin équivaut à un chemin déterminé allant de B en C (une droite dans le cas de la figure) et à un certain nombre de lacets [1] issus de B et entourant Γ. Quand on suit un de ces lacets en partant de B avec la valeur $\log\rho + i\psi$ de $\log\Phi$, et revenant en B, $\log\Phi$ prend la nouvelle valeur $\log\rho + i(\psi + 2\lambda\pi)$. Par suite $\log\Phi - \lambda \log z$ conserve

Fig. 2.



la même valeur : c'est une fonction monodrome dans la région R ; d'après le théorème de Laurent

$$\log\Phi z^{-\lambda} = F_1(z).$$

$F_1(z)$ étant de la même forme que $F(z)$ dans R, d'où

$$\Phi = z^\lambda e^{F_1(z)}$$

et

$$F(z) = z^\lambda P(z) e^{F_1(z)}.$$

On peut remplacer évidemment $z^\lambda P(z)$ par $Q(z)$, étant entendu que $Q(z)$ pourra avoir un pôle pour $z = 0$, et

$$F(z) = Q(z) e^{F_1(z)}.$$

D'où ce théorème :

Théorème I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction monodrome dans une région* R *formée de tous les points du plan des* z *extérieurs à un cercle* Γ *ayant pour centre l'origine,* $F(z)$ *n'ayant dans la région* R *qu'un point critique à l'*∞. *On a dans* R

$$F(z) = Q(z) e^{F_1(z)} = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_0(z),$$

$F_1(z)$ *étant de même forme que* $F(z)$, $Q(z)$ *une fonction de*

---

(1) Nous appelons ici *lacet* un contour allant de B à un point d'un cercle de rayon R' très grand, comprenant ce cercle décrit dans le sens de la flèche, puis revenant en B.

la forme

$$\frac{\alpha_k}{z^k}+\ldots+\frac{\alpha_1}{z}+Q_1(z),$$

$Q_1(z)$ *et* $\varphi_0(z)$ *des fonctions entières,* $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ *une fonction monodrome qui reste finie dans la région* R.

Nous dirons que $F(z)$ *est quasi-entière dans* R *pour* $z=\infty$ (¹).

Soit encore

$$F_1(z)=\psi\left(\frac{1}{z}\right)+\psi_0(z)$$

dans R, $\psi_0(z)$ étant une fonction entière, et $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ restant fini dans la région

$$F(z)=Q(z)\,e^{\psi_0(z)}e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z^k}Q_2(z)\,e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Corollaire I (²). — $F(z)$ *est de la forme*

$$F(z)=\frac{1}{z^k}Q_2(z)\,e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où k est entier positif ou nul, $Q_2(z)$ *une fonction entière,* $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ *une fonction monodrome et finie dans la région* R.

Si $F(z)$ est d'ordre fini, il en est de même de $Q_2(z)$ et réciproquement.

Corollaire II. — *Si* $F(z)$ *est d'ordre fini* ρ, *il en est de même de* $Q_2(z)$, *et réciproquement.* F, Q_2, φ_0 *sont simultanément d'ordre fini* ρ *ou d'ordre infini.*

L'ordre étant fini, la croissance de $F(z)$ *pour* $z=\infty$ *est régulière en même temps que celle de* Q_2 *et* φ_0.

Corollaire III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la croissance de* $F(z)$ *supposé d'ordre fini pour* $z=\infty$ *soit*

(¹) Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas où ∞ est un pôle pour $F(z)$: $Q_1(z)$ est alors un polynome ainsi que $\varphi_0(z)$. $F(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines ainsi que sa dérivée.

(²) Si $F(z)$ est réel pour z réel, $Q(z)$ l'est; on peut prendre pour $F_1(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, des valeurs réelles. Il en est de même pour $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\varphi_0(z)$.

régulière pour $z = \infty$ est que la distribution des zéros soit régulière aux environs de ce point.

Les trois fonctions F, Q_2, φ_0 *sont simultanément à croissance régulière ou irrégulière pour $z = \infty$.*

On conçoit maintenant que toutes les égalités rencontrées dans la théorie des fonction entières et dont on a démontré, avec ou sans restriction, la nécessité ou l'impossibilité en faisant intervenir seulement soit les ordres de grandeur des fonctions entières et de leurs dérivées pour $z = \infty$, soit plus généralement les propriétés qui sont communes aux fonctions entières et aux fonctions monodromes quasi-entières aux environs de $z = \infty$ s'étendront probablement avec les mêmes caractères à ces dernières. Ceci suffit à faire pressentir toute une catégorie de propriétés communes.

III.

Théorème II. — *Soit* $F(z)$ *une fonction quasi-entière réelle dans* R *pour* $z = \infty$. *Supposons que* $F(z)$ *soit d'ordre* < 2 *et n'ait dans* R *qu'un nombre limité de racines imaginaires.*

Si $F(z)$ *a une infinité de racines réelles, il en est de même de sa dérivée, et, dès que* $|z|$ *dépasse une limite déterminée, entre deux racines de* $F(z)$, *il y a une et une seule racine réelle de* $F'(z)$ *: de plus* $F'(z)$ *n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires.*

Si la fonction $F(z)$ *n'a qu'un nombre limité de racines, il en est de même de sa dérivée.*

Soit

$$F(z) = X F_1(z) = z^{\mu} P(z) X e^{\psi(z)}$$
$$= z^{\mu} e^{kz} \Pi\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} e^{\psi(z)},$$

X étant un polynome de degré pair qui a pour racines toutes les racines imaginaires de $F(z)$, en nombre limité, μ un entier, a_n une racine réelle de $F(z)$, $F_1(z)$, $\psi(z)$ des fonctions réelles, la dernière limitée pour $(z) = \infty$, k un nombre réel. On a

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{X'}{X} + \frac{\mu}{z} + k + \psi'(z) + \sum\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{z - a_n}\right).$$

1° Supposons que $F(z)$ n'ait qu'un nombre limité de racines. Multiplions les deux membres par un même facteur $X z \Pi(z - a_n)$. Le second membre devient

$$P_1(z) + \chi_1(z),$$

où $P_1(z)$ est un polynome, $\chi_1(z)$ une fonction de la forme

$$\frac{A''_1}{z} + \frac{A''_2}{z^2} + \cdots$$

Les racines de $F'(z)$ annulent $P_1 + \chi_1$. On peut toujours trouver L assez grand pour que, dès que $|z| > L$, $|\chi_1(z)|$ soit aussi petit qu'on veut et $|P_1(z)|$ aussi grand qu'on veut. Les modules des racines de $F'(z)$ sont limités, et $F'(z)$ n'a dans R qu'un nombre limité de racines.

Quand $F(z)$ *n'a dans* R *qu'un nombre limité de racines, il en est de même de* $F'(z)$.

2° Supposons que $F(z)$ ait un nombre infini de racines. On a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = -\frac{\mu}{z^2} + \psi'(z) - \sum\left(\frac{1}{z - a_n}\right)^2 + \frac{X''X - X'^2}{X^2}.$$

Or

$$\left\{\begin{aligned} \psi(z) &= A'_0 + \frac{A'_1}{z} + \frac{A'_2}{z^2} + \cdots, \\ \psi'(z) &= -\frac{A'_1}{z^2} - \frac{2A'_2}{z^3} + \cdots, \\ \psi''(z) &= +\frac{2A'_1}{z^3} + \frac{2.3A'_2}{z^4} + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Dès que $|z| \geqq L$, $|\psi''(z)|$ est très petit par rapport à $\frac{1}{|z^2|}$. Si μ est positif, les mêmes raisonnements que pour les fonctions entières sont applicables; mais μ peut être négatif; nous allons donc raisonner sans nous préoccuper du signe de μ.

D'abord, pour les très grandes valeurs absolues de z réel, $\frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)$ est négatif.

En effet, $X''X - X'^2$ est alors négatif : il suffira donc de montrer que

$$-\mu - \sum\frac{z^2}{(z - a_n)^2}$$

est négatif et croît indéfiniment en valeur absolue avec z.

Or, ou bien il y a à la fois une infinité de racines positives et négatives, ou bien le nombre des racines positives, par exemple, est limité.

S'il y a une infinité de racines positives, on a

$$\frac{z^2}{(z-a_n)^2} > 1$$

dès que $z > a_n$, a_n étant une quelconque de ces racines. Dès que z dépasse une certaine limite positive assez grande, $\sum \frac{z^2}{(z-a_n)^2}$ est aussi grand qu'on veut.

Un même raisonnement est applicable pour les valeurs négatives de z, s'il y a une infinité de racines négatives.

Quand ces deux circonstances ont lieu à la fois, $\frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)$ est négatif pour z réel, sauf peut-être dans un intervalle fini de l'axe Ox.

Supposons maintenant, par exemple, que le nombre des racines positives seul soit limité. Pour de grandes valeurs positives de z, il y a k racines, positives et négatives, de valeurs absolues $< z$, et pour lesquelles

$$\frac{z^2}{(z-a_n)^2} > \frac{z^2}{4z^2} = \frac{1}{4};$$

k étant aussi grand qu'on veut. Dans ce cas encore $\frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)$ est négatif pour z réel, sauf peut-être dans un intervalle fini de l'axe Ox.

Nous en concluons d'abord ce résultat :

Dès que $|z|$ dépasse une certaine limite finie, les racines réelles de $F'(z)$ *séparent celles de* $F(z)$ *et réciproquement; entre deux racines réelles de* $F(z)$ *il y en a une et une seule de* $F'(z)$.

Nous allons maintenant montrer que, si $F(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires, il en est de même de $F'(z)$.

Soit encore $z = x + yi$ une pareille racine de module très grand; on a

$$\begin{aligned}\frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{X'}{X} + \frac{F'_1(z)}{F_1(z)}\\ &= \frac{\mu(x-yi)}{|z^2|} + k + \psi'_1(z) + \sum\left(\frac{1}{a_n} + \frac{(x-a_n)-yi}{(x-a_n)^2+y^2}\right) + \frac{X'}{X},\end{aligned}$$

a_n étant réel.

$$\psi_1(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots,$$

$$\psi'_1(z) = -\frac{A_1}{z^2} + \frac{B_1}{z^3},$$

où B_1 est fini. Nous supposons A_1 réel. Le coefficient de i est de la forme

$$\frac{-\mu y}{|z^2|} + \frac{A_1}{|z^4|} 2xy - y\sum \frac{1}{(x-a_n)^2+y^2} + y\Delta_1 + y\Delta_2,$$

$y\Delta_1$ provenant de $\frac{B_1}{z^3}$ et Δ_1 étant au plus du même ordre que $\frac{1}{|z^3|}$, $y\Delta_2$ de $\frac{X'}{X}$.

Considérons d'abord $y\left(-\frac{\mu}{|z|^2} - \sum \frac{1}{(x-a_n)^2+y^2}\right)$, et soit

$$T = -\sum \frac{x^2+y^2}{(x-a_n)^2+y^2} - \mu.$$

Nous voulons démontrer que, quand x^2+y^2 est assez grand, T est toujours négatif et croît indéfiniment avec x^2+y^2. Le coefficient de y dans Δ_2 étant aussi négatif, comme nous le verrons tout à l'heure, et les autres coefficients de y étant d'ordre $\leqq \frac{1}{|z^3|}$, il en résultera que le coefficient de y ne pourra s'annuler, et que y doit être nul, par suite la racine correspondante réelle.

Or on a, pour $x > 0$,

$$x^2 + y^2 \geqq (x - a_n)^2 + y^2,$$

tant que $0 \leqq a_n \leqq 2x$. Si le nombre des racines réelles positives est illimité, et si l'on ne prend pas x limité et $\leqq \xi$, $\sum \frac{x^2+y^2}{(x-a_n)^2+y^2}$ est aussi grand qu'on veut pour les valeurs positives de x.

De même pour x négatif et $= -x_1$, on aura

$$x_1^2 + y^2 \geqq \frac{(x_1+a_n)^2+y^2}{4}$$

si

$$4x_1^2 \geqq (x_1+a_n)^2,$$

ou

$$x_1 \geqq a_n,$$

et $\sum \frac{x^2+y^2}{(x-a_n)^2+y^2}$ sera encore aussi grand qu'on veut si l'on ne prend pas $x_1 \leqq \xi$.

Le changement de x en $-x$ permettrait de raisonner de même dans le cas d'un nombre illimité de racines négatives.

Prenons alors $x \leqq \xi$: y devra être aussi grand qu'on veut en valeur absolue. Dès que $|a_n| > 2|x|$,

$$0 < a_n^2 - 2a_n x < 2a_n^2$$

et

$$\frac{x^2+y^2}{(x-a_n)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2a_n x+a_n^2} = \frac{1}{1+\frac{a_n^2-2a_n x}{x^2+y^2}}$$

$$> \frac{1}{1+\frac{2a_n^2}{x^2+y^2}} > \frac{1}{2}$$

pourvu que

$$2 > 1 + \frac{2a_n^2}{x^2+y^2}$$

ou

$$x^2+y^2 > 2a_n^2.$$

Si y est grand, il y autant de valeurs qu'on veut de a_n satisfaisant à cette condition et telles que $|a_n| > 2\xi$. Donc encore

$$T = -\mu - \sum \frac{x^2+y^2}{(x-a_n)^2+y^2}$$

a une valeur absolue aussi grande qu'on veut, et T est négatif.

Il nous reste à vérifier que Δ_2 est négatif.

Soient $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$, deux racines imaginaires conjuguées de X. On a

$$\begin{aligned}\frac{X'}{X} &= \sum\left(\frac{1}{z-(\lambda+\mu i)}+\frac{1}{z-(\lambda-\mu i)}\right)\\ &= \sum\left(\frac{x-\lambda-i(y-\mu)}{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}+\frac{(x-\lambda)-i(y+\mu)}{(x-\lambda)^2+(y+\mu)^2}\right)\\ &= \sum\frac{N_1-N_2 i}{D},\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}D &= [(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2][(x-\lambda)^2+(y+\mu)^2],\\ N_1 &= (x-\lambda)[(x-\lambda)^2+(y+\mu)^2]+(x-\lambda)[(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2],\\ N_2 &= (y-\mu)[(x-\lambda)^2+(y+\mu)^2]+(y+\mu)[(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} N_2 &= 2y(x-\lambda)^2 + (y-\mu)(y+\mu)^2 + (y+\mu)(y-\mu)^2 \\ &= 2y[(x-\lambda)^2 + y^2 - \mu^2]. \end{aligned}$$

La partie imaginaire de $\frac{X'}{X}$ est alors de la forme

$$-2yi\sum\frac{(x-\lambda)^2+y^2-\mu^2}{D},$$

où D est essentiellement positif.

Pour les valeurs de y supérieures aux modules des racines de X, le coefficient de yi dans $\frac{X'}{X}$ est encore négatif. Pour les valeurs de y au plus égales au module de la plus grande racine, $|z|$ étant très grand, $|x|$ est très grand et $(x-\lambda)^2+y^2-\mu^2$ est positif : le coefficient de yi dans $\frac{X'}{X}$ est encore de même signe.

Nous pouvons donc conclure :

Si $F(z)$ *a une infinité de racines réelles et un nombre limité de racines imaginaires,* $F'(z)$ *n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires.*

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Nous allons maintenant nous occuper des extensions aux fonctions considérées ici de certains théorèmes de MM. Picard, Hadamard et Borel sur la densité des racines.

Théorème III. — *Soient* $F(z)$ *une fonction quasi-entière dans* R *pour* $z=\infty$, *d'ordre* ρ *fini,* $\varphi(z)$ *et* $\varphi_1(z)$ *des fonctions quelconques de même nature, mais d'ordre* $<\rho$: *parmi l'ensemble des fonctions*

$$\varphi(z)F(z)-\varphi_1(z),$$

où φ *et* φ_1 *prennent toutes les valeurs possibles, il ne peut y en avoir deux dont l'ordre réel est inférieur à* ρ,

$$\varphi F-\varphi_1, \qquad \psi F-\psi_1,$$

que si $\varphi\psi_1-\psi\varphi_1=0$.

Supposons, en effet,

$$\varphi F - \varphi_1 = z^{\lambda_1} P_1 e^{Q_1+S_1} \quad (^1),$$
$$\psi F - \psi_1 = z^{\lambda_2} P_2 e^{Q_2+S_2},$$

avec $\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 \neq 0$; P_1, P_2 étant des produits de facteurs primaires d'ordre $< \rho$, Q_1, Q_2 des polynomes de degré ρ, S_1, S_2 des fonctions monodromes et qui restent finies dans R, ainsi que leurs dérivées. On a

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 = z^{\lambda_1} P_1 \psi e^{S_1} e^{Q_1} - z^{\lambda_2} P_2 \varphi e^{S_2} e^{Q_2}$$

ou

$$M e^{Q_1} + N e^{Q_2} = L,$$

M, N, L étant des fonctions quasi-entières dans R pour $z = \infty$, et d'ordre $< \rho$, avec $L \neq 0$.

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$(M' + MQ'_1) e^{Q_1} + (N' + NQ'_2) e^{Q_2} = L',$$

M' et N' ayant leurs ordres $< \rho$.

Si le déterminant

$$\Delta = MN' - NM' + MN(Q'_2 - Q'_1)$$

est $\neq 0$, on en tire, par exemple,

$$-\Delta e^{Q_2} = L(M' + MQ'_1) - ML'.$$

e^{Q_2} est une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$ sans o : les zéros de Δ dans R doivent donc tous appartenir au second membre.

Ce second membre étant d'ordre réel $< \rho$, son quotient par Δ l'est également. Ce quotient est alors d'ordre apparent $< \rho$, et la

---

(1) Cette exception ne peut évidemment se produire, puisque le second membre est d'ordre ρ, que pour ρ entier. On remarquera encore que $\varphi F - \varphi_1$, quand φ et φ_1 sont d'ordres $< \rho$, est à croissance régulière pour $z = \infty$, à la condition nécessaire et suffisante que F soit à croissance régulière pour $z = \infty$. Nous signalerons la possibilité d'extensions de ce théorème et du suivant aux fonctions quasi-entières d'ordre non transfini pour $z = \infty$ grâce à la classification introduite par M. Boutroux et nous. Voir encore, pour un cas particulier de ce théorème, HADAMARD, *Comptes rendus*, 1er juin 1896.

relation précédente est impossible : il faut $\Delta = 0$. Alors

$$\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N} = Q'_2 - Q'_1,$$

$$\log \frac{M}{N} = Q_2 - Q_1 + C,$$

$$\frac{M}{N} = e^{C+Q_2-Q_1}.$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure $Q_2 - Q_1$ serait de degré $< \rho$; par suite

$$M + N e^{Q_2-Q_1} = L e^{-Q_1}$$

est impossible, le premier membre étant d'ordre $< \rho$, le second membre d'ordre ρ ([1]). C. Q. F. D.

Corollaire. — *Parmi les équations*

$$F(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)},$$

où φ et φ_1 n'ont aucune racine commune, il y en a une au plus, telle que l'exposant de convergence de la suite de ses racines est inférieur à ρ pour $z = \infty$.

On vérifiera de la même manière le théorème suivant et son corollaire.

Théorème IV. — *Soit $F(z)$ une fonction monodrome quasi-entière dans R pour $z = \infty$ et telle que, pour les grandes valeurs de $|z| = r$,*

$$F(z) < e^{e^{r^m}}$$

(m constante); soient de plus $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ des fonctions quasi-entières d'ordre fini dans R pour $z = \infty$, et telles que

$$\varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 \neq 0.$$

Si les deux fonctions quasi-entières dans R pour $z = \infty$ $\varphi F - \varphi_1$, $\psi F - \psi_1$ sont d'ordre réel fini, F est d'ordre fini.

([1]) Cette démonstration est analogue à celle de M. Borel (*Leç. sur les fonctions entières*, Paris, 1900, p. 95) pour les fonctions entières.

Corollaire. — *Parmi les équations*

$$F = \frac{\varphi_1}{\varphi},$$

où F *est donné et d'ordre infini, il y en a au plus une telle que la suite de ses racines ait un exposant de convergence fini.*

La démonstration repose sur la vérification de l'impossibilité d'une relation de la forme

$$M e^{G_1} + N e^{G_2} = L,$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions quasi-entières d'ordre fini, ainsi que L, M, N.

Nous retrouvons ainsi dans deux cas relativement particuliers, mais que l'on peut considérer comme les plus importants jusqu'à nouvel ordre, surtout en présence des résultats énoncés par MM. Boutroux et Painlevé, un théorème dû à M. Picard, et relatif aux racines d'une fonction monodrome aux environs d'un point singulier essentiel. On retrouve en même temps pour ce cas des extensions du théorème de M. Picard, analogues à celles qui sont dues à MM. Hadamard et Borel pour les fonctions entières, et à nous pour les fonctions quasi-entières. Le perfectionnement particulièrement important apporté ici au théorème de M. Picard est relatif à la détermination de l'exposant de convergence de la suite des racines [1].

---

[1] Soit $F(z) = \varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{G(z)}{z^k} e^{\psi(z)}$ une fonction quasi-entière dans R pour $z = \infty$ et d'ordre quelconque, $G(z)$ une fonction entière, $\psi(z)$ une fonction monodrome et finie dans R ainsi que ses dérivées.

Admettons, d'après M. Borel (*Acta math.*, t. XX, p. 357, *Sur les zéros des fonctions entières*) : 1° que si $\mu(r)$ est le maximum du module de $G(z)$ pour $|z| \leqq r$, $\mu_1(r)$ celui de $G'(z)$ pour $|z| \leqq r$, on ait

$$\text{(A)} \qquad \mu(r)^{1+\alpha} > \mu_1(r) > \mu(r)^{1-\alpha}$$

(α fini aussi petit qu'on veut); 2° que l'inverse du minimum du module d'une fonction entière est du même ordre de grandeur que son maximum, c'est-à-dire que si $e^{\nu(r)}$ est une limite supérieure de ce maximum, $e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}}$ est une limite supérieure de l'inverse du minimum, et $e^{\nu(r)^{1-\alpha_1}}$ une limite inférieure [condition (B)]; admettons plus exactement au moins que ces conditions aient lieu dans la ma-

Il convient encore de considérer les fonctions qu'on peut appeler *quasi-méromorphes* dans R pour $z = \infty$, c'est-à-dire les fonctions monodromes qui n'ont dans R d'autres points critiques à distance finie que des pôles isolés. Si l'on forme la fonction entière $\Phi(z)$ ayant pour zéros les pôles d'une pareille fonction $F(z)$, $F(z)\Phi(z)$ est quasi-entière dans R pour $z = \infty$, et $= \Psi(z)$. Donc

$$F(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}.$$

Théorème V. — *Une fonction quasi-méromorphe dans* R *pour* $z = \infty$ *est le quotient d'une fonction quasi-entière dans* R *pour* $z = \infty$ *par une fonction entière, ou, plus généralement, le quotient de deux fonctions quasi-entières dans* R *pour* $z = \infty$.

Ceci posé, nous étendrons à ces fonctions nos théorèmes sur les fonctions quasi-méromorphes.

Théorème VI. — *Parmi toutes les fonctions quasi-méromorphes dans* R *pour* $z = \infty$ *de la forme* $F - \varphi$ *d'ordres finis* ρ, *où* F *est de la même forme donnée et d'ordre* ρ, φ *une quelconque des fonctions analogues, mais d'ordre* $< \rho$, *il y en a*

---

jeure partie du plan, c'est-à-dire que la somme des épaisseurs des couronnes circulaires dont le centre est à l'origine et où ces conditions n'ont pas lieu pour $|z| \leqq r$ est $\leqq kr$, k étant aussi petit qu'on veut pour r assez grand. Les raisonnements de M. Borel sur l'impossibilité des relations

$$\Sigma G_i(z)\, e^{H_i(z)} = 0,$$

où $i = 1, 2, \ldots, l$ (l fini), G_i, H_i sont des fonctions entières, dont les ordres remplissent certaines conditions, s'étendent de suite aux cas où les G_i et les H_i sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$.

En effet, si $\mu(r)$ et $\mu_1(r)$ se rapportent à $\varphi(z)$, les quantités analogues pour $F(z)$ sont de la forme $\mu(r)(1+\varepsilon)$, $\mu_1(r)(1+\varepsilon_1)$ (ε, ε_1 aussi voisins qu'on veut de 0 pour r assez grand) : la condition (A) subsiste. De plus, l'inverse du minimum de $G(z)$ est $\leqq e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}}$, si le maximum de $G(z)$ est $\leqq e^{\nu(r)}$; celui de $\dfrac{G(z)}{z^k} e^{\psi(r)}$ est

$$\leqq m r^{k_1} e^{\nu(r)^{1+\alpha_1}} = e^{\nu(r)^{1+\alpha_1} + k_1 \log r + \log m}$$

(m constante) $\leqq e^{\nu(r)^{1+2\alpha_1}}$, puisque $\nu(r)^{\alpha} > k_1 \log r + \log m$ dès que $G(z)$ ne se réduit pas à un polynome.

On en conclut le théorème de M. Picard généralisé relatif aux racines des équations de la forme $F(z) = \varphi(z)$, où $F(z)$ est une fonction entière de genre infini, $\varphi(z)$ un polynome, une fonction quelconque d'ordre fini ou une fonction entière d'ordre de grandeur assez petit par rapport à celui de $F(z)$.

une au plus d'ordres réels, tous inférieurs à ceux de Φ, deux au plus telles que les exposants de convergence des suites des modules de leurs racines soient inférieurs à ρ.

Nous appelons encore ici ordre de

$$F = \frac{\Psi}{\Phi}$$

le plus grand des ordres de Ψ et Φ.

La démonstration de la première partie du théorème est semblable à celle que nous avons donnée pour les fonctions quasi-méromorphes; il en est de même pour la deuxième partie, où l'on doit distinguer les trois mêmes cas.

Pour montrer l'importance des résultats précédents dans la théorie des équations différentielles, il nous suffira d'indiquer le résultat suivant :

Théorème VII. — *Soit* $F(z)$ *une fonction monodrome d'ordre fini aux environs d'un point a qui est pour elle un point singulier essentiel isolé. Cette fonction ne peut être aux environs de ce point solution d'une équation différentielle linéaire rationnelle en x que si sa croissance est régulière aux environs de ce point.*

En effet, on pourra toujours, par un changement de variable qui ne changera pas la forme de l'équation différentielle, faire en sorte que le point critique essentiel devienne ∞. On mettra ensuite la fonction donnée sous la forme

$$\varphi_0(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

comme au début du Paragraphe I, et l'on raisonnera comme nous l'avons fait dans un Mémoire antérieur (¹) au sujet des fonctions entières et quasi-entières. La démonstration est à peu près la même.

C. Q. F. D.

En terminant nous indiquerons dans deux Notes annexes un complément à deux de nos Mémoires antérieurs.

(¹) *Ann. Fac. Sc. T.*, 1902, page 456.

IV.

Nous avons établi le théorème suivant :

Théorème. — *Soient*

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$$

une fonction entière d'ordre fini et d'ordre apparent ρ, *et*

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l *dépasse une certaine limite finie, à toute racine de* $f_l(z)$ *de module inférieur à* $l^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}$ *correspond une racine de* $f(z)$, *le module de la différence des deux racines étant aussi peu qu'on veut* (¹) *pourvu que* l *soit assez grand.*

Ce résultat peut être complété ainsi qu'il suit :

Théorème. — *Etant donné un contour* C *quelconque, on peut toujours prendre* λ *assez grand pour qu'à toute racine de* $f(z) = 0$ *dans* C, *avec* $\lambda \leqq l$, *en corresponde dans* C *pour* $f(z)$ *une et une seule, qui en diffère aussi peu qu'on veut* [*les racines de* $f(z)$ *sont supposées distinctes*].

Considérons, en effet, un contour C sur lequel ne se trouve aucun zéro de $f(z)$, et l'intégrale

$$J_l = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_l'(z)}{f_l(z)}\,dz.$$

$|z|$ est limité sur C : dès que l est assez grand, en chaque point de ce contour, $f'(z) = f_l'(z) + \varepsilon$, $f(z) = f_l(z) + \varepsilon_1$, ε et ε_1 étant aussi petits qu'on veut. Si

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

$$|J - J_l| < \eta,$$

η étant aussi petit qu'on veut pourvu que l soit assez grand.

(¹) *Journ. de Mathém.*, 1902, p. 343. D'après la démonstration que nous avons donnée, l'énoncé peut en effet être précisé de cette manière.

Mais J et J_l sont des entiers qui représentent respectivement le nombre de racines de J et J_l compris à l'intérieur du contour C. Dès que $\eta < 1$ il faut

$$J = J_l.$$

Supposant les racines de $f(z)$ distinctes : $f(z)$ et $f'(z)$ n'ont pas de racines communes dans C. A toute racine de $f_l(z)$ dans C en correspond une de $f(z)$; à toute racine de $f_l'(z)$ dans C en correspond une de $f'(z)$. On pourra donc toujours prendre l assez grand pour que $f_l(z)$ et $f_l'(z)$ n'y aient pas de racines communes. Dès lors à toute racine de $f_l(z)$ dans C en correspond une de $f(z)$, les modules des deux racines différant aussi peu qu'on veut. D'après $J = J_l$, il y a réciprocité.

Corollaire. — *S'il y a une infinité de valeurs de $l < \lambda$ telles que $f_l(z)$ n'ait que des racines réelles dans le contour C, $f(z)$ n'y a que des racines réelles.*

Soit, en effet, $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $f(z)$ dans C : d'après le théorème précédent on ne peut assigner aucune limite inférieure à β. Donc $\beta = 0$.

V.

Dans le *Journal de Mathématiques* (1902, p. 42), nous avons établi le théorème suivant :

Théorème. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots,$$

P_0, R_1, R_2, ..., R_n, ..., Q_1, Q_2, ..., Q_n, ... étant des polynomes entiers en x de degrés p_0, r_1, r_2, ..., r_n, ..., q_1, q_2, ..., q_n, ... respectivement avec $r_1 < q_1$, ..., $r_n < q_n$, ..., les zéros réels de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, ... ayant leurs modules limités. Si φ_1 est solution d'une équation différentielle rationnelle en x, y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^k y}{dx^k}$, on doit avoir, dès que n est assez grand

$$q_{n+1} \leqq (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + r_{n+1} + \delta_1,$$

(*ϖ entier qui ne dépend que de k et des exposants de y, y', ..., $y^{(k)}$ dans l'équation en question, δ_1 entier fini*) (¹).

Nous posons

$$\varphi_1 = \eta_n + h_n,$$

$$\eta_n = P_0 + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 \ldots Q_n} = \frac{P_0 Q_1 \ldots Q_n + \ldots + R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n},$$

et, si $|x|$ est suffisamment grand, x étant réel,

$$h_n = \frac{\gamma_0}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}}} \qquad (\gamma_0 \text{ limité} \neq 0).$$

On a, si φ_1 est solution,

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = F(x, \eta_n + h_n, \ldots, \eta_n^{(k)} + h_n^{(k)}) \\ \quad = F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)}) + [h_n F'_y(x, \eta_n, \ldots) + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}}](1+\varepsilon)^2. \end{cases}$$

Le raisonnement suppose $F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)}) \neq 0$. Nous croyons utile, pour éviter une objection, d'établir en détail ce dernier point.

Si

$$F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)}) = 0,$$

on a aussi (²)

$$(2) \qquad h_n F'_y + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}} = 0.$$

Dans cette expression les dérivées sont celles de $F(x, y, \ldots, y^{(k)})$ où l'on remplace après dérivation y, y', ..., $y^{(k)}$ par η_n, η'_n, ..., $\eta_n^{(k)}$.

1° Si l'on n'a pas à la fois

$$(3) \quad \begin{cases} F'_y(x, \eta_n, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F'_{y^{(k)}}(x, \eta_n, \ldots) = 0, \end{cases}$$

h_n satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers et de la forme

$$(4) \qquad a_0 h_n^{(k)} + a_1 h_n^{(k-1)} + \ldots + a_k h_n = 0.$$

(¹) F étant donné, s'il n'admet pas une infinité de solutions rationnelles η_n, le degré du numérateur et du dénominateur des solutions rationnelles η_n de F est limité. Nous supposerons dans ce cas n plus grand que cette limite.

(²) Au moins quand $\frac{s_{n+1} - r_{n+1}}{s_n}$ est assez grand.

D'après

$$h_n = \varphi_1 - \eta_n,$$

φ_1 satisferait à une équation de même forme

$$(5) \qquad F_1 = b_0 y^{(k)} + \ldots + b_k y + b_{k+1} = 0.$$

Appliquons à nouveau la formule (1) à F_1 : le raisonnement fait dans notre Mémoire est applicable si F_1 n'admet pas comme solutions une infinité de fractions rationnelles irréductibles telles que les degrés de leurs dénominateurs aillent en croissant. Nous allons voir que ce dernier cas est impossible.

En effet un nombre fini de ces fractions serait lié par une relation linéaire homogène

$$c_1 \eta_{i_1} + c_2 \eta_{i_2} + \ldots + c_\lambda \eta_{i_\lambda} = 0,$$
$$i_1 < i_2 < \ldots < i_\lambda,$$

les c étant des constantes. On a

$$\eta_{i_\mu} = \frac{\varpi_{i_\mu}}{S_{i_\mu}} = P_0 + \ldots + \frac{R_{i_\mu}}{Q_1 \ldots Q_{i_\mu}} = \frac{P_0 Q_1 \ldots Q_{i_\mu} + \ldots + R_{i_\mu}}{Q_1 \ldots Q_{i_\mu}},$$

et la relation précédente donnerait après multiplication par $Q_1 \ldots Q_{i_\lambda - 1}$

polynome = fraction rationnelle irréductible.

Par conséquent on serait conduit à ce résultat absurde qu'une équation différentielle linéaire a une infinité de solutions linéairement indépendantes : (5) est donc impossible, et η_n n'annule pas $F(x, y, \ldots, y^{(k)})$ dès que $\frac{s_{n+1} - r_{n+1}}{s_n} > \Delta$ (Δ fini positif dépendant exclusivement de k et des degrés de F en $x, y, \ldots, y^{(k)}$).

2° Si l'on a à la fois

$$\left\{\begin{array}{l} F'_y(x, \eta_n, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F'_{y^{(k)}}(x, \eta_n, \ldots) = 0, \end{array}\right.$$

il faudra que ceci ait lieu pour une infinité de valeurs de n, dès que n dépasse une limite finie : ceci aura lieu en particulier quand on remplace, n étant donné, η_n par η_{n+p}, si grand que soit p, pour une infinité de valeurs de p.

On posera

$$\eta_{n+p} = h_n + \eta_n;$$

η_{n+p} devra être solution de $F'_y = 0$ et l'on raisonnera dessus comme on l'a fait sur $F = 0$ et φ_1.

On sera encore conduit aux mêmes conclusions à moins que les dérivées de F'_y par rapport à $y, \ldots, y^{(k)}$ ne soient annulées par une infinité de valeurs de η_n; et ainsi de suite [1].

C. Q. F. D.

Décembre 1902.

---

(1) Mentionnons encore que φ_1 doit être remplacé par η_n dans la page 41 et la première moitié de la page 42 de notre Mémoire.