

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SÉGUIER

Sur la forme canonique des substitutions linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 247-252

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__247_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__247_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FORME CANONIQUE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES;

Par M. DE SÉQUIER.

On peut établir simplement comme il suit la forme canonique des substitutions linéaires et quelques-unes de ses conséquences :

1. On démontrera d'abord, comme M. Jordan dans son *Cours d'Analyse* (t. III, p. 173), le théorème suivant :

Étant donnée une substitution linéaire $\alpha = (\alpha_{ik})$ des variables x_1, \dots, x_n , on peut toujours trouver n fonctions linéaires indépendantes des x formant une ou plusieurs suites $y_1, \dots, y_m; y'_1, \dots, y'_m; \dots$ telles que α remplace les y d'une même suite $y_1, \dots, y_\mu, \dots, y_m$ respectivement par $s_i y_1, \dots, s_i(y_\mu + y_{\mu-1}), \dots, s_i(y_m + y_{m-1})$ ($\mu \geq 2$), s_i étant racine du déterminant caractéristique Δ_α de α , qu'il y ait au moins une suite répondant à chaque racine et que le nombre des y figurant dans les suites répondant à une racine coïncide avec la multiplicité de cette racine.

Considérons maintenant le corps C résultant de l'adjonction des α_{ik} au corps des nombres rationnels ou au corps des nombres $0, 1, \dots, p-1 \bmod p$ (p premier). Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

Soit $\Delta_\alpha = \prod_l f_l(s)^{\sigma_l}$ ($l = 1, \dots, \delta$) la décomposition de Δ_α en facteurs irréductibles dans C , f_l étant de degré ν_l et ayant les racines s_{lk} ($k = 0, \dots, \nu_l - 1$). On peut faire : 1° qu'il y ait une suite y_1, \dots, y_{m_l} où les coefficients des x dans y_i appartiennent au corps C_l résultant de l'adjonction de s_{l0} à C ; 2° qu'il y ait ν_l suites S_{lk} conjuguées $y_{l1k_1}, \dots, y_{lm_l k_1}$ ($y_{li0} = y_i$); 3° que s'il y a plusieurs suites $S_{lj_1 k_1}$ ($j_1 = 1, \dots, \mu_l$; $S_{l1 k_1} = S_{lk_1}$), $y_{lj_1 k_1}, \dots, y_{lj_1 \mu_l k_1}, \dots, y_{lj_1 m_l k_1}$ ($y_{l1 m_l k_1} = y_{lm_l k_1}$), formées avec la même

racine $s_{l k_l}$, on ait $\sum_{j_l} m_{l j_l} = \sigma_l$. On aura ainsi pour chaque valeur de k_l une série $s_{l k_l}$ de σ_l variables (réparties en μ_l suites) et ν_l séries conjuguées formant le système s_l relatif à $f_l(\sum_{i_l} \nu_{i_l} \sigma_{i_l} = n)$; si α_l est l'effet de α sur s_l , les α_l sont permutable et $\alpha = \prod_l \alpha_l$.

J'omettrai dans la démonstration l'indice l , sauf à α_l , et j'écrirai $m_k, s_k, \gamma_{j h k}, S_k, s_k, s$ pour $m_{l k_l}, s_{l k_l}, \gamma_{l j_l h_l k_l}, S_{l k_l}, s_{l k_l}, s_l$ respectivement.

Si tous les σ sont égaux à 1, la démonstration du théorème précédent suffit. Si $\sigma > 1$, on peut y supposer $s_l = s_0$ et elle fournit pour α une forme où figure s_0 . Or α transforme évidemment un polynome $\varphi(x_1, \dots, x_n, s_0) = \varphi(s_0)$ à coefficients dans C en un polynome de même nature $\psi(s_0)$ et par suite $\varphi(s_k)$ en $\psi(s_k)$. Les variables de s_0 étant indépendantes, celles de s_k le seront donc aussi. Mais de plus, cela est bien connu, les variables de s le seront. Car supposons que

$$\begin{aligned} \varphi = c_{11r} \gamma_{11r} + \dots + c_{\mu\mu r} \gamma_{\mu\mu r} + \dots \\ + c_{1,1,r+\rho} \gamma_{1,1,r+\rho} + \dots + c_{\mu,\mu,r+\rho} \gamma_{\mu,\mu,r+\rho} + \dots \end{aligned}$$

soit nulle, les coefficients des variables de s_r n'étant pas tous nuls. Soit $c_{\lambda\tau\theta}$ le premier coefficient $\neq 0$ à partir de la droite ($\theta \neq r$). En transformant φ par α et en retranchant du résultat $s_0 \varphi$, on aura une fonction nulle ne contenant plus $\gamma_{\lambda\tau\theta}$, mais contenant les variables de s_r . En répétant l'opération, on arriverait à une relation entre les γ de s_r .

Supposons alors $\neq 0$ le déterminant des coefficients de $x_1, \dots, x_{\nu\sigma}$ dans les $\gamma_{j h k}$ ($j = 1, \dots, \mu; h = 1, \dots, m; k = 0, \dots, \nu - 1$). $s_0, \dots, s_{\nu-1}$ figurant symétriquement dans les équations qui lient les

$$x_a \quad (a = 1, \dots, \nu\sigma)$$

aux γ et aux $x_{\nu\sigma+b}$ ($b = 1, \dots, n'; n' = n - \nu\sigma$), on aura

$$x_a = \sum_k \eta_{ak} + T_a,$$

T_a étant une fonction des $x_{\nu\sigma+b}$ à coefficients dans C et η_{ak} une fonction des γ de s_k dont les coefficients sont des polynomes en s_k à coefficients dans C indépendants de k ; α remplace $x_{\nu\sigma+b}$ par une

expression de la forme

$$\Sigma_k \zeta_{bk} + \Sigma_c \beta_{bc} x_{\nu\sigma+c} \quad (c = 1, \dots, n'), \quad \zeta_{bk} = \Sigma_{jh} z_{bjhk} y_{jhk},$$

β_{bc} étant dans C et z_{bjhk} étant un polynome en s_k à coefficients dans C indépendants de k . En prenant pour variables les y et les $x_{\nu\sigma+b}$, on voit que le déterminant caractéristique $\Delta_\beta(s)$ de la matrice des β est $\Delta f^{-\sigma}$ et que par suite $\Delta_\beta(s_k) \neq 0$. Prenons alors pour variables les y et les fonctions

$$x'_b = x_{\nu\sigma+b} + \Sigma_k v_{bk}, \quad v_{bk} = \Sigma_{jh} u_{bjhk} y_{jhk},$$

u_{bjhk} étant un polynome à coefficients indéterminés dans C mais indépendants de k , en sorte que v_{bk} est une fonction linéaire des x à coefficients dans C; α transforme x'_b en

$$\Sigma_k \zeta_{bk} + \Sigma_c \beta_{bc} (x'_c - \Sigma_k v_{ck}) + \Sigma_k s_k (v_{bk} + \Sigma_{jh} u_{b,j,h+1,k} y_{jhk}) \\ (u_{b,j,m_j+1,k} = 0).$$

Pour que les y disparaissent de cette expression, il faut et il suffit que les u vérifient

$$\Sigma_c \beta_{bc} u_{cjhk} - s_k (u_{bjhk} + u_{b,j,h+1,k}) = z_{bjhk}.$$

Pour $h = m_j$, ces équations, dont le déterminant est $\Delta_\beta(s_k) \neq 0$, donnent $u_{1,j,m_j,k}, \dots, u_{n',j,m_j,k}$. Ceux-là connus, les mêmes équations, pour $h = m_j - 1$, donnent $u_{1,j,m_j-1,k}, \dots, u_{n',j,m_j-1,k}$; et ainsi de suite. Les u étant ainsi déterminés, on aura $\alpha = \alpha_1 \alpha_{x'}$, α_1 étant l'effet de α sur les y , $\alpha_{x'}$ une substitution à coefficients dans C n'opérant que sur les x' (fonctions linéaires des x à coefficients dans C) et $|\alpha_{x'}| = \Delta_\alpha f^{-\sigma}$. On est donc ramené à canoniser $\alpha_{x'}$ et la proposition est démontrée.

2. Soient

$$y'^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda} = \Sigma_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}} u_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda} y_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}$$

de nouvelles variables. Pour qu'elles soient canoniques, il faut d'abord que α leur fasse subir la même substitution qu'aux y , chaque y' correspondant à l' y de mêmes indices, d'où la condition

$$(1) \quad u_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda} (s_{\lambda k_\lambda} - s_{l k_l}) = s_{l k_l} u_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda} - s_{\lambda k_\lambda} u_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda - 1 k_\lambda},$$

$u_{i_{j\lambda} h_{i_{j\lambda} k_\lambda}}^{\lambda_{j\lambda} h_{\lambda j} k_\lambda}$ étant nul si $h_{\lambda j_\lambda}$ est < 1 ou $> m_{\lambda j_\lambda}$ ou si $h_{l j_l}$ est < 1 ou $> m_{l j_l}$.

3. Cherchons le nombre de ces changements de variables (ou des substitutions α') quand C est un corps d'imaginaires de Galois d'ordre $\pi = p^m$ (p premier).

Tout d'abord le nombre des $u_{j'j}^{i'k'}$ non nécessairement nuls est, pour chaque couple j, j' , le plus petit $m_{jj'}$ des deux nombres $m_j, m_{j'}$. Mais ces $\Sigma m_{jj'}$ coefficients sont liés par la condition que le déterminant D de (2) soit $\neq 0$. Pour calculer D, rangeons les j et les j' de manière que $m_j \geq m_{j+1}, m_{j'} \geq m_{j'+1}$ [alors

$$\Sigma_{jj'} m_{jj'} = 2 \Sigma_{(j' < j)} m_{jj'} - \Sigma m_{jj} = \Sigma_j (2j - 1) m_j],$$

et soit

$$\begin{aligned} m_1 = \dots = m_{\varepsilon_1} > m_{\varepsilon_1+1} = \dots = m_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} > m_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = \dots \\ > m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{q-1}+1} = \dots = m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_q} \quad (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_q = \mu). \end{aligned}$$

Il y aura ε_r suites contenant $m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}$ variables et, si

$$m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r} \geq \rho > m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{r+1}}$$

(en faisant $m_{\mu+1} = 0$), $\mu_\rho = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$ suites contenant au moins ρ variables ($\mu_1 = \mu$). Rangeons alors les j' de manière que les $\mu_\rho j'_{\rho\rho}$ se suivent dans l'ordre croissant des j' et que $y'_{1\rho+1}$ suive $y'_{\mu_\rho\rho}$, puis ordonnons $y'_{j\rho}$ de manière que les $\mu_\rho y_{j\rho}$ se suivent dans l'ordre croissant des j et que $y_{1\rho+1}$ suive $y_{\mu_\rho\rho}$. $\pm D$ se réduira évidemment à un produit de mineurs principaux

$$D_\rho = |u_{j'1}^{i'1}| (j, j' = 1, \dots, \mu_\rho; \rho = m_1, \dots, 1).$$

Or, dans D_ρ , $u_{j'1}^{i'1} = 0$ pour $1 \leq m_{j'} - m_j$, c'est-à-dire pour $m_j < m_{j'}$. Donc D_ρ se réduit aussi à un produit des mineurs principaux

$$D_{\rho 1} = \Delta_1 = |u_{j'1}^{i'1}| (j, j' = 1, \dots, \varepsilon_1),$$

$$D_{\rho 2} = \Delta_2 = |u_{j'1}^{i'1}| (j, j' = \varepsilon_1 + 1, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \dots,$$

$$D_{\rho r} = \Delta_r = |u_{j'1}^{i'1}| (j, j' = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-1} + 1, \dots, \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r).$$

Δ_1 entrera dans tous les D_ρ où $\mu_\rho \geq \varepsilon_1$, c'est-à-dire dans $D_1, \dots, D_{m_{\varepsilon_1}}$; ...; Δ_r entrera dans tous les D_ρ où $\mu_\rho \geq \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$, c'est-à-dire dans $D_1, \dots, D_{m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}}$. Donc $\pm D = \prod_{r=1}^{r=q} \Delta_r^{m_{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}}$. Δ_r contenant ε_r^2 éléments, il y a, hors de $\Delta, K = \Sigma m_{jj'} - \Sigma \varepsilon_r^2$ arbitraires dont chacune a π^v déterminations, v étant le degré du facteur irréductible annulé par s_k , et l'on sait que le nombre des détermina-

tions du Tableau des éléments de Δ_r qui donnent $\Delta_r \neq 0$ est

$$\prod_{i=0}^{e_r-1} (\pi^{r e_r} - \pi^{v_i}) = \varpi(r, v).$$

Donc le nombre des déterminations du système considéré des $\mathcal{Y}'_{j^{h'k'}}$, que je supposerai être le λ^a , est

$$\pi^{kv} \prod_{r=1}^q \varpi(r, v) = \psi(\lambda).$$

Le nombre des changements de variables (ou des α') est $\Pi_1^{\delta} \psi(\lambda)$.

L'ordre du groupe L formé par les substitutions linéaires à coefficients dans C, étant $\prod_{i=0}^{n-1} (\pi^n - \pi^i)$, on connaîtra par là le nombre des conjuguées de α dans L.
