EDMOND MAILLET

Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 134-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__134_1>

SUR LES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ENTIÈRES ET QUASI ENTIÈRES;

Par M. Edmond Maillet.

I.

Les polynomes $F(x)$ à coefficients rationnels jouissent de diverses propriétés que l'on pourrait chercher à étendre aux fonctions entières et quasi entières [1]. Ainsi :

1° Le produit de deux polynomes à coefficients rationnels a ses coefficients rationnels;

2° Si x est rationnel ou algébrique, $F(x)$ l'est également;

3° Si b est rationnel ou algébrique, $F(x+b)=0$, ordonné suivant les puissances croissantes de x, a ses coefficients rationnels ou algébriques.

Dans quelle mesure ces propriétés existent-elles pour les fonctions entières ou quasi entières? Nous ne prétendons pas traiter ici la question d'une façon absolument générale. Nous pourrons néanmoins, par des exemples suffisamment étendus, basés surtout sur la considération des fonctions quasi algébriques,

---

(1) Pour la signification de ce mot, *voir* notre Communication du 17 février 1902 à l'Académie des Sciences.

mettre en lumière la différence profonde qui existe arithmétiquement entre les trois catégories de fonctions : polynomes, fonctions entières, fonctions quasi entières.

Dans les exemples que nous indiquons, si la première propriété peut subsister pour les fonctions entières, les deux autres ne subsistent pas. Enfin, aucune n'est vraie pour les fonctions quasi entières.

Nous terminons en montrant qu'il y a une infinité de fractions continues non algébriques dont l'ensemble a la puissance du continu et qui sont racines d'équations de la forme

$$1 + \sum_{1}^{\infty} {}^{n}\, c_n x^n = 0,$$

où les c_n sont rationnels et décroissent suffisamment vite avec n (¹).

II.

FONCTIONS ENTIÈRES.

Considérons la fonction entière $e^x - a$ où a est rationnel. On sait, d'après les théorèmes d'Hermite et de M. Lindemann sur le nombre e, que e^x, par suite $e^x - a$ ne peut être algébrique que si x est transcendant (¹). Donc les racines de $e^x - a = 0$ sont transcendantes. Il y a là une véritable réciprocité.

De même $e^{x+b} = e^b\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)$ a tous ses coefficients transcendants si b est rationnel ou algébrique. Enfin, les racines d'une fonction entière peuvent être rationnelles sans que ses coefficients le soient. Exemple :

$$\sin \pi z = \pi Z \Pi \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\pi z}{1} - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} + \ldots$$

(¹) Un résumé de la présente Note a été communiqué à l'Académie des Sciences (19 mai 1902). Sa lecture exige seulement la connaissance du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* de notre Note du *Journal de Mathématiques* (1901) sur les équations transcendantes, et de notre Mémoire des *Acta mathematica* (1902) sur les nombres e et π et les équations transcendantes. On peut rapprocher avec intérêt de ce qui suit diverses Notes de M. P. Staeckel (*Math. Ann.*, t. 46, p. 513, *Comptes rendus,* 20-27 mars 1899, et *Jahrb. der Deuts. Mat. Ver.*, t. XI, 1902).

Considérons de la même manière une fonction quasi algébrique

$$X(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n$$

où $|a_n|$ est limité et où t_n croît suffisamment vite avec n, a_n et t_n étant entiers : c'est ce que nous pouvons appeler *une fonction* $X(x)$ *quasi algébrique.* Si x est rationnel, $X(x)$ est transcendant : les racines de $X(x) = 0$ sont donc irrationnelles : nous savons déjà d'ailleurs qu'elles sont transcendantes ([1]). Il y a encore là une véritable réciprocité.

On en conclut que la deuxième et la troisième des propriétés des polynomes indiquées au § I ne subsistent pas ici.

Au contraire, il est très possible que la première propriété subsiste, à condition de définir avec précision la divisibilité des fonctions entières. En tout cas, le produit de deux fonctions entières à coefficients rationnels est évidemment une fonction entière à coefficients rationnels.

III.

FONCTIONS QUASI ENTIÈRES.

Nous allons voir, au contraire, qu'aucune de ces trois propriétés ne paraît subsister pour les fonctions quasi entières que nous avons surtout en vue ici.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit l'équation réciproque*

(1) $$f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = a,$$

où a est rationnel, et $f(z)$ est une fonction entière à coefficients rationnels. Par la transformation $u = z + \frac{1}{z}$ on obtient l'équation équivalente $\varphi(u) = a$, où $\varphi(u)$ est une fonction entière.

1° *Si $f(z) = e^z$, φ a tous ses coefficients transcendants;*

2° *Si $f(z)$ est une fonction $X(x)$, c'est-à-dire une fonction*

([1]) En sorte que si ξ est algébrique, $X(\xi)$ est transcendant.

entière à coefficients $c_n = \frac{s_n}{t_n}$ rationnels, et si $|s_n| \leqq \sigma_n$, les σ_n étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance des t_n suffisamment rapide pour que $\varphi(u)$ ait tous ses coefficients transcendants.

Posons

$$z + \frac{1}{z} = 2u,$$

$$z^2 - 2uz + 1 = 0,$$

$$z = u \pm \sqrt{u^2 - 1}.$$

L'équation (1) devient

$$f(u + \sqrt{u^2 - 1}) + f(u - \sqrt{u^2 - 1}) = a. \tag{2}$$

Le premier membre, si l'on pose $\sqrt{u^2 - 1} = y$, ne change pas quand on y change y en $-y$. Ce sera donc une fonction paire de y, par suite une fonction bien déterminée de u et n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de u, c'est-à-dire une fonction monodrome. Le premier membre ne devient infini que pour $z = 0$ ou ∞, c'est-à-dire $u = \infty$; c'est donc une fonction entière de u [1].

L'équation (2) est une équation entière

$$\varphi(u) = a. \tag{2^{bis}}$$

équivalente à (1) grâce à la transformation $z + \frac{1}{z} = u$.

Mais cette équation (2^{bis}) n'aura probablement pas ses coefficients rationnels ou même algébriques en général. Nous citerons à cet égard deux exemples :

1° $$f(z) = e^z;$$

(1) devient

$$e^z + e^{\frac{1}{z}} = a;$$

$$\varphi(u) = e^{u+\sqrt{u^2-1}} + e^{u-\sqrt{u^2-1}} = 2e^u \cos\sqrt{1-u^2} = 2e^u \psi(u)$$
$$= \varphi(0) + \frac{u}{1}\varphi'(0) + \frac{u^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots,$$

---

[1] La transformation $z + \frac{1}{z} = u$ rejette les points critiques de (1) à l'infini.

$\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... seront évidemment des fonctions linéaires à coefficients rationnels de $\cos 1$ et $\sin 1$. Ainsi

$$\varphi(0) = 2\cos 1,$$
$$\varphi'(0) = [2e^u\psi(u) + 2e^u\psi'(u)]_{u=0} = 2\psi(0) = 2\cos 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'une manière générale

$$\varphi^{(k)}(u) = 2e^u\psi(u) + 2C_k^1 e^u\psi'(u) + \ldots + 2e^u\psi^{(k)}(u)$$

et

$$\varphi^{(k)}(0) = 2\psi(0) + \ldots = 2\cos 1 + \ldots,$$

chacun des termes du dernier membre contenant en facteur $\cos 1$ ou $\sin 1$ multiplié par un nombre rationnel; $\varphi^{(k)}(0)$ n'est d'ailleurs pas nul en général, sans quoi $\varphi(u)$ se réduirait à un polynome, ce qui est absurde. $\varphi^{(k)}(0)$ est alors de la forme

$$A\cos 1 + B\sin 1,$$

A et B étant rationnels et l'un des deux $\neq 0$.

Les coefficients de $\varphi(u)$ sont alors tous transcendants. En effet,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$
$$\cos 1 = \frac{e^i + e^{-i}}{2}$$

ne peut être algébrique, car e^i le serait, ce qui est impossible, d'après M. Lindemann, puisque i l'est; $\sin 1 = \sqrt{1 - \cos^2 1}$ est transcendant ainsi que $A\cos 1 + B\sin 1$, sans quoi $\cos 1$ serait algébrique. Donc $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ est algébrique.

Ceci démontre la première partie du théorème.

2° Ce qui précède n'est pas un cas unique : nous allons montrer que, dans un cas très étendu, l'équation (2^{bis}) a ses coefficients tous transcendants, bien que l'équation (1) ait ses coefficients tous rationnels.

Soient

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$
$$\varphi(u) = 2c_0 + c_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + \ldots + c_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + \ldots$$

ou, en posant

$$Z_n = z^n + \frac{1}{z^n},$$

$$\varphi(u) = 2c_0 + c_1 Z_1 + \ldots + c_n Z_n + \ldots$$

Calculons le coefficient de u^q dans le développement

$$\varphi(u) = \gamma_0 + \gamma_1 u + \ldots + \gamma_q u^q + \ldots.$$

On a, en général,

$$u^{2p} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p} = Z_{2p} + C_{2p}^1 \; Z_{2p-2} + C_{2p}^2 \; Z_{2p-4} + \ldots + C_{2p}^{p-1} \; Z_2 + C_{2p}^p,$$

$$u^{2p+1} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p+1} = Z_{2p+1} + C_{2p+1}^1 Z_{2p-1} + C_{2p+1}^2 Z_{2p-3} + \ldots + C_{2p+1}^{p-1} Z_3 + C_{2p+1}^p Z_1,$$

et ces formules connues permettent de calculer Z_1, Z_2, ... par voie de récurrence.

On obtient

$$\left\{\begin{array}{l} Z_2 = u^2 - 2, \\ Z_4 + C_4^1 Z_2 = u^4 - C_4^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_{2p} + C_{2p}^1 Z_{2p-2} + \ldots + C_{2p}^{p-1} Z_2 = u^{2p} - C_{2p}^p, \end{array}\right.$$

d'où

$$Z_{2p} = \frac{B_{2p}}{D_{2p}},$$

avec

$$D_{2p} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ C_4^1 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & . & . & \ldots \\ C_{2p}^{p-1} & . & . & \ldots\; 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$B_{2p} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u^2 - 2 \\ C_4^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & u^4 - C_4^2 \\ \ldots & . & . & \ldots & . & \ldots\ldots \\ C_{2p}^{p-1} & . & . & \ldots & C_{2p}^1 & u^{2p} - C_{2p}^p \end{vmatrix},$$

$$Z_{2p} = \Delta_0^{(2p)} u^{2p} + \Delta_2^{(2p)} u^{2p-2} + \ldots + \Delta_{2p}^{(2p)}.$$

De même

$$Z_{2p+1} = B_{2p+1} = \Delta_0^{(2p+1)} u^{2p+1} + \Delta_2^{(2p+1)} u^{2p-1} + \ldots + \Delta_{2p}^{(2p+1)} u,$$

B_{2p+1} ayant une expression analogue et les δ étant des entiers.

Dès lors,

$$\varphi(u) = 2c_0 + c_1 u + c_2(u^2 - 2) + \ldots + c_{2p} B_{2p} + c_{2p+1} B_{2p+1} + \ldots.$$

Le coefficient de u^q est de la forme

$$\gamma_q = c_q \delta_0^{(q)} + c_{q+1} \delta_1^{(q+1)} + c_{q+2} \delta_2^{(q+2)} + \ldots + c_{q+i} \delta_i^{(q+i)} + \ldots.$$

D'ailleurs, $\delta_i^{(q+i)}$ est limité en fonction de $q+i$ et croît moins vite, pour une valeur donnée de $q+i$, qu'une certaine fonction $\chi(q+i)$, quels que soient q et i. Ceci va nous suffire pour montrer que si les c_n décroissent assez vite avec $\frac{1}{n}$ et sont convenablement choisis, les nombres γ_q sont en général transcendants.

En effet, nous raisonnerons encore comme l'a fait Liouville pour montrer l'existence de nombres transcendants.

Si $f(x) = 0$ est une équation algébrique irréductible de degré k à coefficients entiers,

$$\frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} = c_q \delta_0^{(q)} + \ldots + c_{q+i} \delta_i^{(q+i)},$$

avec

$$c_{q+i} = \frac{s_{q+i}}{t_{q+i}},$$

$P_{q+i}^{(q)}$, $Q_{q+i}^{(q)}$ entiers premiers entre eux, s_{q+i} et t_{q+i} étant limités en fonction de $q+i$, ainsi que $P_{q+i}^{(q)}$, $Q_{q+i}^{(q)}$; $Q_{q+i}^{(q)}$ divise le dénominateur commun à c_q, ..., c_{q+i}.

Soit $|s_q| \leqq \sigma_q$, quel que soit q, le mode de croissance des σ_q étant donné. Nous supposerons le mode de croissance des t_q assez rapide pour que

$$\left| \xi - \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} \right| < 2 \left| c_{q+i+1} \delta_i^{(q+i+1)} \right|,$$

quels que soient q et i. La chose est toujours possible, car, pour chaque valeur de $q+i$, le nombre d'inégalités auxquelles doit satisfaire c_{q+i+1} est limité.

On a, pour $q+i$ assez grand,

$$f\left(\frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}}\right) \geqq \frac{A}{Q_{q+i}^{(q)k}} \geqq \frac{1}{Q_{q+i}^{(q)k}} \qquad (\text{A entier} \neq 0),$$

ou, *a fortiori,*

$$(3) \qquad \left| \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} - \xi \right| M \geqq \frac{1}{Q_{q+i}^{(q)^k}},$$

si $\left| \xi - \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} \right|$ est $<$ la demi-différence entre deux racines de $f(x) = 0$.

M a une limite inférieure fonction de q pour toutes les équations où les coefficients et le degré sont $\leqq q + i$. Donc,

$$\left| \frac{P_{q+i}^{(q)}}{Q_{q+i}^{(q)}} - \xi \right| = \eta_{q+i}$$

a une limite inférieure λ_{q+i} fonction de $q + i$. Si t_{q+i} croît suffisamment vite avec $q + i$, on peut toujours prendre t_{q+i+1} assez grand pour que η_{q+i} soit $< \frac{1}{M\, t_{q+i}^k}$ dès que $q + i$ est assez grand, quel que soit q, c'est-à-dire pour que (3) soit impossible. En effet, il suffira

$$(4) \qquad 2\,|\, c_{q+i+1}\, \delta_i^{(q+i+1)} \,| < \lambda_{q+i}.$$

Donnant alors à q dans γ_q les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q + i = q'$, on obtient pour η_{q+i}, et, par suite, λ_{q+i}, $q' + 1$ valeurs ; de même pour $\delta_i^{(q+i+1)}$, si on laisse $q + i$ constant : il suffira de prendre $|\, c_{q+i+1} \,| <$ la plus petite des valeurs $\frac{\lambda_{q+i}}{2\,\delta_i^{q+i+1}}$ correspondantes pour que (3) soit impossible pour $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q+i}$, par suite pour que $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q+i}$ soient transcendants.

On peut donc déterminer un mode de croissance assez rapide des t_j pour que tous les γ_j soient transcendants [1]. C. Q. F. D.

Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

---

[1] On pourrait montrer d'une façon analogue que γ_q de module < 1 ne peut être racine d'une équation $\sum_0^\infty \theta_n x^{\varpi_n} = 0$ quand les θ_n décroissent assez vite ou quand les ϖ_n croissent assez vite, pourvu que les numérateurs des θ_n aient leur croissance limitée.

THÉORÈME II. — *Soit*

$$\sum_0^\infty c_n z^n + \sum_0^\infty \frac{c_n^0}{z^n} = \sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} z^n \sum_0^\infty \frac{a_n^0}{t_n^0} \frac{1}{z^n}$$

une fonction quasi entière avec un point singulier essentiel à l'origine : si $|a_n| \leqq \alpha_n$, $|a_n^0| \leqq \alpha_n^0$, *les* α_n, α_n^0 *étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance assez rapide des* t_n, t_n^0 *pour que* $\sum_0^\infty c_n z^n$ *et* $\sum_0^\infty \frac{c_n^0}{z^n}$ *aient tous leurs coefficients transcendants quand* a_n, a_n^0, t_n, t_n^0 *sont entiers.*

Soient

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n, \qquad \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^\infty \frac{b_n^0}{z^n},$$

$\varphi(z)$ et $\varphi_0(z)$ étant des fonctions entières à coefficients rationnels,

$$b_n = \frac{a_n}{t_n}, \qquad b_n^0 = \frac{a_n^0}{t_n^0} \qquad (a_n,\ a_n^0,\ t_n,\ t_n^0 \text{ entiers}).$$

On sait que le produit

$$\varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^\infty c_n z^n + \sum_0^\infty \frac{c_n^0}{z^n}.$$

On a

$$c_\lambda = \sum_0^\infty{}^n\, b_{n+\lambda} b_n^0 = \sum_0^\infty \frac{a_{n+\lambda}\, a_n^0}{t_{n+\lambda}\, t_n^0},$$

$$c_\lambda^0 = \sum_0^\infty{}^n\, b_n b_{n+\lambda}^0 = \sum_0^\infty \frac{a_{n+\lambda}^0\, a_n}{t_{n+\lambda}^0\, t_n}.$$

D'après ce qu'on a vu dans la démonstration du théorème précédent, c_λ et c_λ^0 étant précisément de la forme γ_q, on peut toujours prendre un mode de croissance suffisamment rapide des t_n, t_n^0, quand les α_n, α_n^0 sont donnés, pour que c_λ et c_λ^0 soient transcendants.

Remarque. — c_λ, c_λ^0 décroissent alors aussi vite qu'on veut avec $\frac{1}{\lambda}$, pourvu que b_n, b_n^0 décroissent suffisamment vite avec $\frac{1}{n}$.

Donc, ici,

$$\sum_0^\infty c_n z^n, \sum_0^\infty c_n^0 z^n \text{ sont quasi algébriques quand } \sum_0^\infty b_n^0 z^n, \sum_0^\infty b_n^0 z^n$$

le sont.

Il convient, avant d'aller plus loin, de chercher à étendre ceci aux fonctions quasi entières générales. Il nous suffira de considérer les fonctions quasi entières

$$F(z) = f(z) + f_0\left(\frac{1}{z}\right) + f_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),$$

où l'on suppose que $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ sont des fonctions algébriques à coefficients rationnels.

Les produits $\varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$, $\varphi(z)\,\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$, $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$ ont encore leurs coefficients transcendants : on le voit comme tout à l'heure.

Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit la fonction quasi entière*

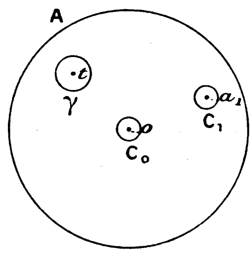
$$F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n + \sum_0^\infty \frac{c_n^0}{z^n} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(1)}}{(z-a_1)^n} = \sum_0^\infty b_n z^n \sum_0^\infty \frac{b_n^0}{z^n} \sum_0^\infty \frac{b_n^{(1)}}{(z-a_1)^n}$$

(a_1 rationnel) où les b_n, b_n^0, $b_n^{(1)}$ sont rationnels et égaux à

$$\frac{s_n}{t_n}, \frac{s_n^0}{t_n^0}, \frac{s_n^{(1)}}{t_n^{(1)}}, \quad \text{avec} \quad |s_n| \leq \sigma_n, \quad |s_n^{(0)}| \leq \sigma_n^{(0)}, \quad |s_n^{(1)}| \leq \sigma_n^{(1)},$$

les $\sigma_n, \sigma_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(1)}$ étant donnés, on peut toujours choisir un mode de croissance assez rapide des t_n, $t_n^{(0)}$, $t_n^{(1)}$ pour que le premier membre possède autant de coefficients transcendants que l'on veut.

En effet, considérons un cercle c_0 de petit rayon r_0 ayant pour centre l'origine, un cercle c_1 de petit rayon r_1 ayant pour centre a_1, un cercle γ de petit rayon ρ ayant pour centre un point t quelconque du plan extérieur à C_0 et C_1, et enfin le cercle A de rayon R aussi grand qu'on veut ayant pour centre l'origine et contenant t. La fonction $\frac{F(z)}{z-t}$ est monodrome à l'intérieur de la région S formée du cercle A diminué des cercles C_0, C_1, γ. On aura



$$\int_A \frac{F(z)}{z-t}\,dz = \int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{\gamma}.$$

On a le long de A

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = +\frac{1}{z}\left(1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}+\ldots\right),$$

car $\bmod\left|\frac{t}{z}\right| < 1$.

Le long de C_0,

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{\frac{z}{t}-1} = -\frac{1}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}+\ldots\right).$$

car $\left|\frac{z}{t}\right|$ y est < 1;

Le long de C_1

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a_1-(t-a_1)} = \frac{1}{t-a_1}\,\frac{1}{\frac{z-a_1}{t-a_1}-1}$$

$$= -\frac{1}{t-a_1}\left(1+\frac{z-a_1}{t-a_1}+\ldots\right),$$

car $\left|\frac{z-a_1}{t-a_1}\right|$ y est < 1.

Dès lors,

$$\int_{\gamma} = 2\pi i\,F(t),$$

$$\int_A = \int_A \frac{F\,dz}{z} + \frac{t}{1}\int_A \frac{F\,dz}{z^2} + \ldots,$$

$$-\int_{C_0} = \frac{1}{t}\int_{C_0} F\,dz + \frac{1}{t^2}\int_{C_0} z\,F\,dz + \frac{1}{t^3}\int_{C_0} z^2 F\,dz + \ldots,$$

$$-\int_{C_1} = \frac{1}{t-a_1}\int_{C_1} F\,dz + \frac{1}{(t-a_1)^2}\int_{C_1} (z-a_1)\,F\,dz + \ldots.$$

On en conclura la valeur des coefficients c_n, $c_n^{(0)}$, $c_n^{(1)}$ de f, f_0, f_1. Ainsi

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} z^{n-1} F(z)\,dz.$$

Il reste à prouver que si φ, φ_0, φ_1 sont quasi algébriques à coefficients rationnels, $c_n^{(0)}$ est transcendant. Or, soit

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n,$$

et b_μ le premier des coefficients b_n qui soit $\neq 0$. Soit encore aux environs de $z = 0$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \Phi(z) = \frac{z^{(k)}\,\Phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{z^{k+1}\,\Phi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} + \ldots,$$

si $\Phi^{(k)}(z)$ est la première des dérivées de Φ qui ne s'annule pas pour $z = 0$. On aura

$$\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = z^k\left(\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} + \ldots\right)$$

et, si $|z|$ est suffisamment petit le long de C_0,

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} b_\mu(1+\varepsilon)\,\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}(1+\varepsilon')\,\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) z^{n-1+\mu+k}\,dz,$$

$|\varepsilon|$, $|\varepsilon'|$ étant aussi petits qu'on veut. On en conclut

$$c_n^{(0)} = \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}\,b_\mu\,b_{n+\mu+k}^{(0)}, \qquad k \text{ étant fini et } \geqq 0.$$

Il suffira donc que $\Phi^{(k)}(0)$ soit transcendant pour que $c_n^{(0)}$ le soit. Or

$$\begin{aligned}
\Phi\ (z) &= \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\\
\Phi'\ (z) &= -\left(\frac{1}{z-a_1}\right)^2 \varphi_1'\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\\
\Phi''\ (z) &= \varphi_1''\left(\frac{1}{z-a_1}\right)\left(\frac{1}{z-a_1}\right)^4 + 2\,\varphi_1'\left(\frac{1}{z-a_1}\right)\left(\frac{1}{z-a_1}\right)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\Phi^{(k)}(z) &= \varphi_1^{(k)}\left(\frac{1}{z-a_1}\right) P_k^{(k)} + \varphi_1^{(k-1)}\left(\frac{1}{z-a_1}\right) P_{k-1}^{(k)} + \ldots,
\end{aligned}$$

$P_k^{(k)}$, $P_{k-1}^{(k)}$, ... étant des polynomes en $\frac{1}{z-a_1}$ de degré limité en $\frac{1}{z-a_1}$ au numérateur et au dénominateur.

Or

$$\varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)=\sum_0^\infty \frac{b_n^{(1)}}{(z-a_1)^n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varphi_1^{(k)}\left(\frac{1}{z-a_1}\right)=\sum_0^\infty \frac{b_n^{(1)}\,n(n+1)\dots(n+k-1)}{(z-a_1)^{n+k}}.$$

Alors

$$\Phi^{(k)}(0)=\varphi_1^{(k)}\left(-\frac{1}{a_1}\right)P_k^{(k)}\left(-\frac{1}{a_1}\right)+\dots=\sum_0^\infty \frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^n}P_0^{(k)}\left(-\frac{1}{a_1}\right)+\dots$$

$$+\sum_0^\infty \frac{b_n^{(1)}\,n(n+1)\dots(n+k-1)}{(-a_1)^{n+k}}P_k^{(k)}\left(-\frac{1}{a_1}\right)=\sum_0^\infty b_n^{(1)}\,Q_n^{(k)}(a_1).$$

Or

$$P_k^{(k)}\pm\left(\frac{1}{z-a_1}\right)_{z=0}^{2k}=\frac{1}{a_1^{2k}},$$

qui est $\neq 0$.

Pour les valeurs de n qui dépassent une limite assez grande, $\Phi^{(k)}(0)$ est de la forme

$$\sum\frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^{n+k}}P_k^{(k)}\left(-\frac{1}{a_1}\right)n^k(1+\varepsilon_n)=\sum\frac{b_n^{(1)}}{(-a_1)^{3k+n}}n^k(1+\varepsilon_n),$$

ε_n étant aussi petit qu'on veut, pourvu que n soit assez grand, mais étant rationnel quel que soit n. Le coefficient de $b_n^{(1)}$ est donc $\neq 0$ dès que n dépasse une certaine limite.

D'après ce que nous avons vu dans la démonstration du théorème I, si $b_n^{(1)}=\frac{s_n^{(1)}}{t_n^{(1)}}$ avec $|s_n^{(1)}|\leq\sigma_n^{(1)}$, et si $\sigma_n^{(1)}$ est limité en fonction de n, pour un mode de croissance suffisamment rapide de $t_n^{(1)}$ avec n, $\Phi^{(k)}(0)$ est de la forme γ_q et, par suite, est transcendant ainsi que $c_n^{(0)}$.

Nous en concluons finalement le théorème annoncé, sans même chercher à étudier la nature des c_n et $c_n^{(1)}$. C. Q. F. D.

Remarque. — On peut abréger la démonstration en s'appuyant sur cette propriété des fonctions quasi algébriques à coefficients rationnels : $\varphi_1\left(-\frac{1}{a_1}\right)$ est transcendant, par suite $\neq 0$, quand a_1 est rationnel; il en résulte de suite $k = 0$.

Nous allons maintenant chercher à montrer que les équations $F(z) = a$ à coefficients rationnels comme a [$F(z)$ étant de la même forme qu'au théorème III, mais les c_n, $c_n^{(0)}$, $c_n^{(1)}$ étant rationnels] ne possèdent aucune racine algébrique ou encore que $F(\zeta)$ est transcendant quand ζ est algébrique, pourvu que les c_n, $c_n^{(0)}$, $c_n^{(1)}$ soient rationnels et que les t_n, $t_n^{(0)}$, $t_n^{(1)}$ satisfassent à des conditions semblables de croissance (¹).

Théorème IV. — *Soit la fonction quasi entière*

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(0)}}{x^{\varpi_n^{(0)}}} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(1)}}{(x-a_1)^{\varpi_n^{(1)}}},$$

à coefficients rationnels $\neq 0$ *ainsi que a (les* ϖ *étant entiers),*

$$c_n = \frac{s_n}{t_n}, \qquad c_n^{(0)} = \frac{s_n^{(0)}}{t_n^{(0)}}, \qquad c_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{t_n^{(1)}},$$

avec

$$|s_n| \leqq \sigma_n, \qquad |s_n^{(0)}| \leqq \sigma_n^{(0)}, \qquad |s_n^{(1)}| \leqq \sigma_n^{(1)}.$$

Les σ_n, $\sigma_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(1)}$ *étant donnés, on peut toujours, pour toutes les fonctions* F *où les s satisfont aux conditions ci-dessous, choisir un même mode de croissance assez rapide de* t_n, $t_n^{(0)}$, $t_n^{(1)}$ *pour que les fonctions* F *n'aient aucune racine algébrique; autrement dit, pour que* $F(\zeta)$ *soit transcendant dès que* ζ *est algébrique* (²).

En effet, soit $F(\zeta)$ racine d'une équation algébrique irréductible

$$\Phi = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n_1} x^{n_1} = 0,$$

(¹) La fonction $F(z)$ du théorème III ne possède évidemment aucune racine algébrique, puisque aucune des trois fonctions dont elle est le produit n'en possède.

(²) Un théorème similaire a été établi par nous pour les fonctions entières dans un autre Mémoire (*Acta mathematica*, 1902).

à coefficients entiers, ζ étant algébrique et racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers

$$\Psi = B_0 + B_1 X + \ldots + B_\nu X^\nu = 0,$$

$$(5) \qquad |A_0|, \ \ldots, \ |A_{n_1}|, \ |B_0|, \ \ldots, \ |B_\nu|, \ |\zeta|,$$

n_1, ν étant au plus égaux à une fonction A_n du nombre n arbitraire, mais qui croît au moins aussi vite que le nombre n.

Supposons encore qu'en changeant la notation on ait

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(0)}}{x^{\varpi_n^{(0)}}} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(1)}}{(x - a_1)^{\varpi_n^{(1)}}},$$

les c_n, $c_n^{(0)}$, $c_n^{(1)}$ étant ici tous $\neq 0$, les ϖ_n, $\varpi_n^{(0)}$, $\varpi_n^{(1)}$ entiers et a_1 étant un nombre rationnel quelconque dont le numérateur et le dénominateur sont limités et $\leqq n$.

Posons encore

$$F_n(z) = \sum_0^n c_n x^{\varpi_{n1}} + \sum_0^n \frac{c_n^{(0)}}{x^{\varpi_n^{(0)}}} + \sum_0^n \frac{c_n^{(1)}}{(x - a_1)^{\varpi_n^{(1)}}}.$$

Enfin supposons σ_n, $\sigma_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(1)}$ constamment croissants avec n et $\leqq A_n$. Soient enfin

$$F_n(\zeta) = F_n, \qquad F(\zeta) = F_n + \varepsilon_n.$$

Si le mode de décroissance des c_n, $c_n^{(0)}$, $c_n^{(1)}$ est suffisamment rapide, on aura toujours

$$|\varepsilon_n| < E_n,$$

E_n étant la plus grande des quantités

$$6\,|c_{n+1}|\,A_n^{\varpi_{n+1}}, \quad 6\,|c_{n+1}^{(0)}|\,A_n^{\varpi_{n+1}^{(0)}}, \quad 6\,|c_{n+1}^{(1)}|\,A_n^{\varpi_{n+1}^{(1)}}.$$

Considérons alors

$$(6) \qquad \Phi(F_n + \varepsilon_n) = 0 = \Phi(F_n) + \varepsilon_n M.$$

On peut toujours prendre n assez grand et c_{n+1}, $c_{n+1}^{(0)}$, $c_{n+1}^{(1)}$ assez petits pour que $|\varepsilon_n|$ soit plus petit que la demi-différence entre deux racines de toutes les équations irréductibles $\Phi = 0$ satisfaisant aux conditions (5). M est alors ici limité inférieurement en fonction de $A_0, A_1, \ldots, A_{n_1}$, par suite de n_1. On aura

$$|\varepsilon_n M| = |\Phi(F_n)|,$$

(7) $$|\varepsilon_n| \geqq \frac{\Phi(F_n)}{M},$$

et

$$\Phi(F_n) \neq 0.$$

Considérons toutes les valeurs de $\Phi(F_n)$ correspondant aux valeurs de ζ, des A, des B, de n et ν satisfaisant à (5) et aux diverses valeurs des $s \leqq$ aux σ correspondants. Leur nombre est limité en fonction de n. $\Phi(F_n)$ a donc en fonction de n une limite inférieure qui ne dépend que de $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_0^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}, c_0^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}, a_1$, des ϖ et de A_n. Finalement, le mode de croissance des $s_i, s_i^{(0)}, s_i^{(1)}, t_i, t_i^{(0)}, t_i^{(1)}$ étant donné jusqu'à l'indice n, $\Phi(F_n)$ a une limite inférieure fonction de n pour toutes les valeurs des $s_i^{(j)} \leqq \sigma_i^{(j)}$; $|\varepsilon_n|$ peut être pris aussi petit qu'on veut pourvu que $c_{n+1}, c_{n+1}^{(0)}, c_{n+1}^{(1)}$ soient suffisamment petits, c'est-à-dire assez petits pour que (7) soit impossible, par suite (6).

Supposons maintenant donné le mode de croissance des σ. D'après ce qui précède, on peut toujours déterminer un mode de croissance des $t_i, t_i^{(0)}, t_i^{(1)}$ suffisamment rapide pour que, dès que n est assez grand, le raisonnement ci-dessus soit applicable quels que soient Φ et Ψ supposés choisis *a priori*. Le théorème en résulte immédiatement. C. Q. F. D.

Enfin, soit b rationnel; si

$$F(z+b) = \sum_0^\infty c_n (z+b)^n + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(0)}}{(z+b)^n} + \sum_0^\infty \frac{c_n^{(1)}}{(b-a_1+z)^n}$$
$$= f(z+b) + f_0\left(\frac{1}{z+b}\right) + f_1\left(\frac{1}{z-a_1+b}\right),$$

on a

$$f(z+b) = f(b) + \frac{z}{1} f'(b) + \frac{z^2}{1.2} f''(b) + \ldots,$$

$$f^{(k)}(b) = \sum_0^\infty c_n b^{n-k} n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Les coefficients de $f(z+b)$ développé suivant les puissances croissantes de z sont encore tous transcendants.

En résumé, nous trouvons ici en défaut pour les fonctions quasi entières les propriétés essentielles des polynomes à coefficients entiers que nous avons signalées dans le § I.

IV.

Soit

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = c_0 + c_1 x^{\varpi_1} + \ldots = 0$$

une équation quasi algébrique à coefficients rationnels : si le mode de croissance des c_n est suffisamment rapide, toute racine de

$$F_n(z) = 0 = \sum_0^n c_n x^{\varpi_n}$$

est très voisine d'une racine correspondante de F. Dès lors, on peut penser à tirer parti de cette remarque pour l'étude du développement en fraction continue des racines de $F(z)$. Nous allons établir la propriété suivante :

Théorème V. — *Soit la fraction continue*

$$Z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}$$

où, sur θ quotients incomplets consécutifs, il y en a toujours un au moins qui croît au delà de toute limite et suffisamment vite quand son indice augmente indéfiniment, les autres restant limités.

On peut déterminer une équation à coefficients rationnels de la forme

$$1 + \sum_0^\infty {}'' c_n x^n = 0$$

ayant Z pour racine; les c_n décroîtront aussi vite et leurs numérateurs croîtront aussi vite que l'on voudra, pourvu que la *croissance des quotients incomplets ci-dessus soit assez rapide.*

Enfin, si la croissance de ces quotients est assez rapide, Z n'est pas algébrique; l'ensemble des fractions Z non algébrique a la puissance du continu et est distinct de l'ensemble analogue des nombres transcendants racines des équations quasi algébriques

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$$

où $|a_n|$ *entier limité,* t_n *entier croissant suffisamment vite avec* n.

En effet, considérons l'équation

$$F_1(x) = 1 + c_1 x = 0$$

en supposant $c_0 = 1$: F_1 a la racine (1)

$$x = -\frac{1}{c_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Soit

$$F_2(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0;$$

F_2 aura une racine $\frac{p_2}{q_2}$ rationnelle si l'on détermine c_2 par la condition

$$F_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = 0,$$

$$c_2 = -\frac{1 + c_1 \frac{p_2}{q_2}}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2} = -\frac{1 - \frac{q_1}{p_1}\frac{p_2}{q_2}}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2} = -\frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{p_1 q_2 \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2};$$

c_2 sera aussi petit qu'on veut pourvu que $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}$ le soit, car

$$c_2 = -\frac{\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}}{\frac{p_1}{q_1}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2}.$$

Nous poserons $p_1 q_2 - p_2 q_1 = \varepsilon_1$ ($|\varepsilon_1|$ entier $\leqq A$, A étant limité), ce qui est toujours possible pour des valeurs de p_2 et q_2 aussi grandes qu'on veut si p_1, q_1 sont premiers entre eux deux

(1) $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$ sont, dans ce qui suit, des fractions irréductibles.

à deux. Les développements en fraction continue de $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ sont d'ailleurs limités. On déterminera de la même manière $c_3, c_4, \ldots$ de façon que

$$F_k(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_k x_k$$

ait une racine $\frac{p_k}{q_k}$ rationnelle aussi voisine qu'on veut de $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ avec

$$p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = \varepsilon_{k-1},$$

q_k étant aussi grand qu'on veut par rapport à q_{k-1}.

Considérons

$$F_{k+1}(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_{k+1} x^{k+1} = 0$$

qui a pour racine $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, et développons $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ en fraction continue. Nous supposerons que $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ possède tous les quotients incomplets de $\frac{p_k}{q_k}$. On a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k}{q_k q_{k+1}} = \frac{\varepsilon_k}{q_k q_{k+1}}, \\ &\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n_k}}} = \frac{p'_{n_k}}{q'_{n_k}}, \\ &\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n_k} + \cfrac{1}{y_{n_k}}}} = \frac{p'_{n_k} y_{n_k} + p'_{n_k-1}}{q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1}}. \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} &= \frac{p'_{n_k}(q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1}) - q'_{n_k}(p'_{n_k} y_{n_k} + p'_{n_k-1})}{q'_{n_k}(q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1})} \\ &= \frac{p'_{n_k} q'_{n_k-1} - q'_{n_k} p'_{n_k-1}}{q'_{n_k}(q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1})} = \frac{(-1)^{n_k-1}}{q'_{n_k}(q'_{n_k} y_{n_k} + q'_{n_k-1})}. \end{aligned}\right.$$

Pour que la différence $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ soit aussi petite qu'on veut par rapport à q_k^{-1}, il faut que q_{k+1} puisse être pris aussi grand qu'on veut, par suite aussi y_{n_k}.

Soit

$$y_{n_k} = a_{n_k+1} + \cfrac{1}{a_{n_k+2} + \cdots + \cfrac{1}{a_{n_{k+1}}}}.$$

a_{n_k+1} doit être un entier aussi grand qu'on veut; au contraire, nous supposerons $a_{n_k+2}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ limités, s'ils existent.

En effet,

$$\left\{\begin{array}{l} p'_{n_k+1} = p'_{n_k} \quad a_{n^k+1} + p'_{n_k-1}, \\ p'_{n_k+2} = p'_{n_k+1} a_{n_k+2} + p'_{n_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p'_{n_{k+1}} = p'_{n_{k+1}-1} a_{n_{k+1}} + p'_{n_{k+1}-2}; \end{array}\right.$$

de même pour les q'. Donc

$$p'_{n_{k+1}} = p'_{n_k+1} \varphi_1 + p'_{n_k} \varphi_2,$$

φ_1 et φ_2 étant limités si $a_{n_k+2}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ le sont, ainsi que $n_{k+1} - n_k$.

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p'_{n_{k+1}}}{q'_{n_{k+1}}} - \frac{p'_{n_k}}{q'_{n_k}}$$
$$= \frac{(p'_{n_k+1}\varphi_1 + p'_{n_k}\varphi_2)\, q'_{n_k} - p'_{n_k}(q'_{n_k+1}\varphi_1 + q'_{n_k}\varphi_2)}{q'_{n_k} q'_{n_{k+1}}}$$
$$= \frac{\varphi_1 (p'_{n_k+1} q'_{n_k} - p'_{n_k} q'_{n_k+1})}{q'_{n_k} q'_{n_{k+1}}} = \frac{(-1)^{n_k}\varphi_1}{q'_{n_k} q'_{n_{k+1}}}.$$

Or

$$q'_{n_{k+1}} = q'_{n_k+1}\varphi_1 + q'_{n_k}\varphi_2,$$

et $\dfrac{\varphi_1}{q'_{n_k} q'_{n_{k+1}}}$ est évidemment de même ordre de grandeur que $\dfrac{1}{q'_{n_k} q'_{n_k+1}}$.

Ceci posé, considérons une fraction continue illimitée

$$Z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \ldots},$$

où sur θ quotients incomplets consécutifs (θ limité) il y en a toujours un au moins qui croît au delà de toute limite et assez vite quand l'indice augmente indéfiniment, les autres étant limités. Considérons les réduites successives obtenues en s'arrêtant à ces quotients incomplets particuliers : on obtient une suite

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_k}{q_k}, \quad \ldots$$

de réduites pour lesquelles (8) a lieu, ε_k restant limité.

Nous pourrons toujours déterminer c_{k+1} de façon que $F_{k+1}(x)$ ait pour racine $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. On aura

$$\begin{aligned} F_k\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) &= 1 + c_1 \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} + \ldots + c_{k+1}\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)^{k+1} \\ &= F_k\left(\frac{p_k}{q_k} + \eta\right) + c_{k+1}\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)^{k+1} \\ &= \eta\, F'_k\left(\frac{p_k}{q_k} + \theta_1 \eta\right) + c_{k+1}\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

si $\eta = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}$.

η étant aussi petit qu'on veut et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ étant limité, c_{k+1} est aussi petit qu'on veut. La série

$$F = 1 + \sum_1^\infty n\, c_n x^n$$

a donc des coefficients qui décroissent aussi vite qu'on veut; F_k a alors une racine $\frac{p_k}{q_k}$ différant d'aussi peu qu'on veut de $\frac{p_k}{q_k}$ et qui tend vers Z quand k croît indéfiniment, d'après un théorème connu ([1]).

Ici

$$c_{k+1} = -\left(\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}\right)^{k+1} F_k\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right).$$

Le dénominateur de la quantité rationnelle $F_k\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$ est de la forme

$$\gamma\, q_{k+1}^k,$$

et γ est limité en fonction de k. On peut toujours prendre q_{k+1} assez grand pour que c_{k+1} ait son numérateur aussi grand qu'on veut. Les séries

$$1 + \sum_1^\infty c_n x^n$$

ainsi obtenues ne sont pas de la forme

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n$$

([1]) *Comptes rendus*, 9 décembre 1901, et *Acta mathematica*, 1902.

$|a_n|$ étant un entier limité. Cela devait être, car nous avons vu [1] que pour ces dernières le développement en fraction continue d'une racine a la croissance de ses quotients incomplets limités. L'ensemble obtenu diffère donc de l'ensemble des racines de ces équations; il a d'ailleurs aussi la puissance du continu, puisqu'on peut attribuer à chacun des quotients incomplets de Z au moins deux valeurs distinctes [2].

---

[1] *Comptes rendus*, 15 avril 1901, et *Journal de Mathématiques*, 1901, p. 47.
[2] Borel, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, p. 33.