BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 83-91
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__83_0>

SUR LES BARYCENTRES CYCLIQUES DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES;

Par M. Maurice d'Ocagne.

Définition. — On sait que le barycentre G des points communs à une courbe algébrique et à un cercle quelconque de centre C est indépendant du rayon de ce cercle (¹). La courbe algébrique fait ainsi correspondre à tout point C de son plan un point G qui, pour rappeler sa définition, sera dit le *barycentre cyclique* du point C par rapport à cette courbe algébrique (²).

Les barycentres cycliques pris par rapport à une courbe algébrique quelconque recouvrent, en général, l'ensemble continu des points du plan. Mais, pour une catégorie nombreuse de courbes qui, à cet égard, peuvent être dites *singulières,* ces barycentres cycliques fournissent seulement l'ensemble continu des points d'une certaine droite. C'est à l'étude de cette circonstance exceptionnelle qu'est principalement consacrée la Note qui suit.

1. Nous nous appuierons, pour déduire les coordonnées (ξ, η) du barycentre G de celles (α, β) du point C, sur le lemme algébrique suivant dû à Liouville (³) :

Si, mettant en évidence les groupes de termes homogènes des deux degrés les plus élevés dans les équations de deux courbes algébriques, d'ordres respectifs m et n, nous écrivons les équations de ces courbes

$$F(x,y) + F_1(x,y) + \ldots = 0,$$
$$f(x,y) + f_1(x,y) + \ldots = 0,$$

(¹) Nous avons donné (*Nouv. Ann. de Math.,* 3ᵉ série, t. V, 1886, p. 295) une démonstration élémentaire, directe de ce théorème, qui peut être considéré comme un cas particulier de celui de Liouville sur l'invariance du barycentre des points communs à deux courbes algébriques quelconques qui varient en conservant les mêmes asymptotes, théorème à l'occasion duquel son auteur a donné le lemme algébrique utilisé ici, et dont des démonstrations plus simples ont été proposées par MM. Humbert (*Nouv. Ann.,* 3ᵉ série, t. VI, 1887, p. 535) et Fouret (*Nouv. Ann.,* 3ᵉ série, t. IX, 1890, p. 243).

(²) Dans le cas où la courbe algébrique se décompose en un système de droites, le *barycentre cyclique* du point C se confond avec ce que nous avons appelé ailleurs son *barycentre podaire* (*Journal de l'École Polytechnique,* 1ʳᵉ série, 63ᵉ cahier, 1893, p. 3).

(³) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1ʳᵉ série; t. VI, 1891, p. 358.

nous avons les coordonnées (ξ, η) *du barycentre des points communs à ces deux courbes au moyen des formules*

$$\xi = \frac{1}{mn}\sum\left[\frac{F'_y(1,t)f_1(1,t)}{F(1,t)f_y(1,t)} - \frac{F_1(1,t)}{F(1,t)}\right] = \frac{\Sigma\Phi(t)}{mn},$$

$$\eta = \frac{1}{mn}\sum\left[\frac{F'_x(u,1)f_1(u,1)}{F(u,1)f'_x(u,1)} - \frac{F_1(u,1)}{F(u,1)}\right] = \frac{\Sigma\Psi(u)}{mn},$$

les signes $\sum$ *s'appliquant respectivement à toutes les racines de l'équation*

$$f(1,t) = 0$$

et de l'équation

$$f(u,1) = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, la seconde équation est celle du cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0.$$

On a donc ici

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f_1(x,y) = -2\alpha x - 2\beta y,$$

et, par suite,

$$t = \pm i, \qquad u = \pm i.$$

Nous poserons :

$$F(1,i) = M_0 + M_1 i, \qquad F'_y(1,i) = N_0 + N_1 i, \qquad F_1(1,i) = P_0 + P_1 i,$$

ce qui revient, si nous écrivons

$$F(x,y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1}y + \ldots + a_{m-1}xy^{m-1} + a_m y^m,$$
$$F_1(x,y) = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2}y + \ldots + b_{m-2}xy^{m-2} + b_{m-1}y^{m-1},$$

à prendre, en prolongeant les formules jusqu'à épuisement des a_i et b_i,

$$(1)\begin{cases} M_0 = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots + (-1)^\mu a_{2\mu} + \ldots, \\ M_1 = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots + (-1)^\mu a_{2\mu+1} + \ldots, \\ N_0 = a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + \ldots + (-1)^\mu (2\mu+1) a_{2\mu+1} + \ldots, \\ N_1 = 2a_2 - 4a_4 + 6a_6 - 8a_8 + \ldots - (-1)^\mu 2\mu\, a_{2\mu} - \ldots, \\ P_0 = b_0 - b_2 + b_4 - b_6 + \ldots + (-1)^\mu b_{2\mu} + \ldots, \\ P_1 = b_1 - b_3 + b_5 - b_7 + \ldots + (-1)^\mu b_{2\mu+1} + \ldots. \end{cases}$$

Un calcul facile montre alors que

$$\Phi(i) = \frac{N_0\alpha - N_1\beta + P_1 + i(N_1\alpha + N_0\beta + P_0)}{M_1 - M_0 i},$$

et, par suite, que

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(i)+\Phi(-i)\\ &\quad = 2\,\frac{(M_1N_0-M_0N_1)\,\alpha-(M_0N_0+M_1N_1)\,\beta-(M_0P_0+M_1P_1)}{M_0^2+M_1^2}.\end{aligned}\right.$$

Posant de même :

$$F(i,1)=M'_0+M'_1\,i,\qquad F'_x(i,1)=N'_0+N'_1\,i,\qquad F_1(i,1)=P'_0+P'_1\,i,$$

on trouve également que

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Psi(i)+\Psi(-i)\\ &\quad = 2\,\frac{(M'_1N'_0-M'_0N'_1)\,\beta-(M'_0N'_0+M'_1N'_1)\,\alpha-(M'_0P'_0+M'_1P'_1)}{M_0'^2+M_1'^2}.\end{aligned}\right.$$

Mais on peut déduire les coefficients M, N, P des coefficients M′, N′, P′. Cette recherche, comme toutes celles où intervient la substitution de i dans un polynome, exige que l'on ait égard au caractère résiduel du degré par rapport au module 4. Les résultats peuvent se résumer ainsi :

Lorsque m est pair ($m=2\mu$), *on a*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} M'_0&=(-1)^\mu M_0, & N'_0&=(-1)^\mu(N_0-mM_1), & P'_0&=-(-1)^\mu P_1,\\ M'_1&=-(-1)^\mu M_1, & N'_1&=-(-1)^\mu(N_1+mM_0), & P'_1&=-(-1)^\mu P_0,\end{aligned}\right.$$

et lorsque m est impair ($m=2\mu+1$),

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} M'_0&=(-1)^\mu M_1, & N'_0&=(-1)^\mu(N_1+mM_0), & P'_0&=(-1)^\mu P_0,\\ M'_1&=(-1)^\mu M_0, & N'_1&=(-1)^\mu(N_0-mM_1), & P'_1&=-(-1)^\mu P_1.\end{aligned}\right.$$

Calculant au moyen soit des formules (4), soit des formules (4′), selon que m est pair ou impair, les coefficients de la formule (3), on trouve, *dans tous les cas*,

$$\begin{aligned} M'_1N'_0-M'_0N'_1&=M_0N_1-M_1N_0+m(M_0^2+M_1^2),\\ M'_0N'_0+M'_1N'_1&=M_0N_0+M_1N_1,\\ M'_0P'_0+M'_1P'_1&=-M_0P_1+M_1P_0,\\ M_0'^2+M_1'^2&=M_0^2+M_1^2.\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} M_1N_0-M_0N_1&=\lambda,\\ M_0N_0+M_1N_1&=\mu,\\ M_0P_0+M_1P_1&=\nu,\\ M_1P_0-M_0P_1&=\varpi,\\ M_0^2+M_1^2&=\rho,\end{aligned}\right.$$

les formules (2) et (3) deviennent

$$\Phi(i) + \Phi(-i) = 2\,\frac{\lambda\alpha - \mu\beta - \nu}{\rho},$$

$$\Psi(i) + \Psi(-i) = 2\,\frac{-\mu\alpha + (m\rho - \lambda)\beta - \varpi}{\rho},$$

et, par suite, les formules de Liouville donnent ici

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\lambda\alpha - \mu\beta - \nu}{m\rho},\\ \eta &= \frac{-\mu\alpha + (m\rho - \lambda)\beta - \varpi}{m\rho}.\end{aligned}\right.$$

Observons tout de suite que, si $\rho = 0$, le barycentre G est, quel que soit C, rejeté à l'infini. C'est qu'en effet, ρ étant le carré du module de $F(1, i)$, cette quantité s'annule si $F(x, y)$ est divisible par $x^2 + y^2$, auquel cas la courbe algébrique, comme le cercle, passe par les points cycliques du plan, ce qui fait que le point G se trouve sur la droite de l'infini. Nous supposons ici qu'il n'en est pas ainsi, autrement dit que *la courbe algébrique considérée n'admet pas les directions isotropes comme directions asymptotiques*. Cette condition sera sous-entendue dans tout ce qui suit.

2. En général, comme nous l'avons annoncé au début, les formules (6) font correspondre à tout point C un barycentre cyclique G qui varie avec lui, et réciproquement de façon qu'à l'ensemble de tous les points du plan, pris pour C, correspond aussi l'ensemble de tous les points du plan pris pour G. Mais il n'en est pas toujours ainsi. *Certaines courbes ne font correspondre comme* G, *à l'ensemble de tous les points du plan pris pour* C, *que l'ensemble des points d'une certaine droite* Δ, *tous les points* C *correspondant à un même point* G *de* Δ *étant ceux d'une droite* D *de direction fixe située à une distance constante de* G. C'est ce résultat que nous allons démontrer ici en nous servant des formules qui viennent d'être établies.

Les formules (6) montrent qu'un même point $G(\xi, \eta)$ correspondra à tout un ensemble de points $C(\alpha, \beta)$ si l'on a

$$(7)\qquad \frac{-\mu}{\lambda} = \frac{m\rho - \lambda}{-\mu} = \theta,$$

parce qu'alors ces formules donnent

$$\xi = \frac{\lambda\alpha - \mu\beta - \nu}{m\rho},$$
$$\eta = \frac{\theta(\lambda\alpha - \mu\beta) - \varpi}{m\rho},$$

ce qui montre que le point G reste invariable lorsque le point C se déplace sur une droite D définie par l'équation

(8) $$\lambda x - \mu y = h,$$

h étant une constante. Les coordonnées du point G peuvent, en effet, s'écrire dans ce cas

(9) $$\xi = \frac{h - \nu}{m\rho}, \qquad \eta = \frac{\theta h - \varpi}{m\rho},$$

et l'on voit que ce point appartient toujours à la droite Δ dont l'équation est

(10) $$\theta x - y = \frac{\varpi - \theta\nu}{m\rho}.$$

Remarquons tout de suite que la distance δ du point G défini par les formules (9), à la droite correspondante D dont l'équation est (8), est donnée par

$$\delta = \frac{h(\lambda - \mu\theta - m\rho) - \lambda\nu + \mu\varpi}{m\rho\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

ou, si l'on remplace θ par la seconde des valeurs définies par (7),

(11) $$\delta = \frac{-\lambda\nu + \mu\varpi}{m\rho\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

quantité constante comme nous l'avions annoncé.

La condition (7) peut s'écrire

(7') $$\lambda^2 + \mu^2 - m\rho\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant λ et μ par leurs valeurs tirées de (5), réduisant et supprimant le facteur ρ, différent de zéro par hypothèse,

(12) $$m(M_1 N_0 - M_0 N_1) - (N_0^2 + N_1^2) = 0.$$

Telle est la condition pour que *tous les barycentres cycliques* G *viennent se condenser sur une même droite* Δ.

De même l'expression de δ, transformée au moyen des formules (5), devient

$$(13) \qquad \delta = \frac{N_1 P_0 - N_0 P_1}{m\sqrt{(M_0^2 + M_1^2)(N_0^2 + N_1^2)}}.$$

Elle s'annule si

$$(14) \qquad N_1 P_0 - N_0 P_1 = 0.$$

Dans ce cas, chaque barycentre G se trouve sur la droite D correspondante et, par suite, *lorsque le point* C *est pris sur la droite* Δ, *il se confond avec son barycentre cyclique.*

3. L'expression qui figure dans le premier membre de (12), et dont l'annulation définit les courbes *singulières* au point de vue qui nous occupe, étant représentée par Γ_m, on trouve, en se reportant aux formules (1),

$$\Gamma_2 = a_1^2 - 4a_0 a_2,$$
$$\Gamma_3 = 2(a_1^2 + a_2^2 - 3a_0 a_2 - 3a_1 a_3),$$
$$\Gamma_4 = 3a_1^2 + 4a_2^2 + 3a_3^2 - 8a_0 a_2 + 16a_0 a_4 - 8a_2 a_4 - 10a_1 a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'une manière générale

$$\Gamma_m = \sum_{i=1}^{i=m-1} h_i a_i^2 + \sum k_{\mu,\mu'} a_{2\mu} a_{2\mu'} + \sum l_{\mu,\mu'} a_{2\mu+1} a_{2\mu'+1},$$

la première somme ne s'étendant qu'aux coefficients a_i autres que le premier a_0 et le dernier a_m, les deux autres à tous les produits deux à deux, d'une part des coefficients à indices pairs, de l'autre de ceux à indices impairs.

La condition $\Gamma_2 = 0$ montre que *la seule conique singulière est la parabole.* Dans ce cas, comme on le verra plus loin, *la droite* Δ *est l'axe de la parabole, les droites* D *sont les perpendiculaires à cet axe, et la distance constante de* δ *de tout barycentre* G *à la droite* D *correspondante est égale au paramètre de la parabole* (1).

(1) Nous avons démontré directement et utilisé ce résultat dans une Note spé-

Le seul examen de l'expression de Γ_m fait immédiatement apercevoir des cas très généraux de singularité. Par exemple, *quel que soit m, on a* $\Gamma_m = 0$, *si tous les* a_i *sauf* a_0 *sont nuls.* Cela correspond au cas où l'on a

$$F(x, y) = a_0 x^m,$$

c'est-à-dire où *toutes les directions asymptotiques de la courbe considérée sont confondues.*

Parmi les courbes qui offrent ce caractère, il y a lieu de distinguer celles dont l'équation s'écrit

$$(15) \qquad y^p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m \qquad (\text{pour } p \leqq m - 1).$$

Lorsque $p < m - 1$, on trouve, par l'application des formules (6),

$$\xi = -\frac{c_{m-1}}{mc_m}, \qquad \eta = \beta.$$

Le point G ainsi défini n'est autre que le barycentre des points de rencontre de la courbe avec la parallèle à Ox menée par le point C, parallèle qui joue dès lors ici le rôle de droite D, et qui passe, comme on voit, par le point G correspondant.

Si, en particulier, on fait $p = 1$, on obtient ainsi (pour $m \geqq 3$) toutes les *paraboles générales* définies par

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m.$$

Ainsi donc *le barycentre cyclique d'un point quelconque par rapport à une parabole générale d'ordre au moins égal à 3 se confond avec le barycentre des points de rencontre de la courbe avec la perpendiculaire à sa direction asymptotique menée par le point considéré.*

Si l'on suppose maintenant, dans l'équation (15), $p = 1$, *le résultat reste le même si m est impair, mais, si m est pair, on a*

$$\xi = -\frac{c_{m-1}}{mc_m}, \qquad \eta = \beta + \frac{(-1)^\mu}{mc_m},$$

---

ciale (*Journal de Mathématiques spéciales*, 5e série, t. V, 1891, p. 79) et c'est précisément ce résultat particulier qui nous a donné l'idée d'entreprendre l'étude générale contenue dans la présente Note.

c'est-à-dire que *le point* G, *toujours situé sur la même droite* Δ, *ne se trouve plus sur la droite* D *correspondante* ($y = \beta$), *mais s'en trouve à une distance constante* δ *donnée par*

$$\delta = \frac{(-1)^\mu}{mc_m}.$$

Dans le cas de $m = 2$, on a

$$\delta = \frac{-1}{2c_2},$$

et $\frac{1}{2c_2}$ est précisément le paramètre de la parabole, ce qui donne le résultat rappelé plus haut.

Une autre catégorie de courbes singulières est fournie par celles qui, *pour* m *impair* ($m = 2\mu + 1$), sont telles que tous les a_i soient nuls sauf a_0 et a_m. On voit, en effet que, dans ce cas aussi, $\Gamma_m = 0$.

Comme exemple de telles courbes on peut citer les *courbes de Lamé d'ordre impair,* définies par l'équation

$$A x^{2\mu+1} + B y^{2\mu+1} = 1.$$

Les formules (6) donnent ici

$$\xi = \frac{B}{A^2 + B^2}[B\alpha - (-1)^\mu A\beta],$$

$$\eta = \frac{-(-1)^\mu A}{A^2 + B^2}[B\alpha - (-1)^\mu A\beta].$$

On voit que le barycentre G ainsi défini reste constamment sur la droite Δ dont l'équation est

$$A x + (-1)^\mu B y = 0.$$

De plus les droites D correspondant aux divers barycentres G sont définies par

$$B x - (-1)^\mu A y = h.$$

Elles sont, comme on voit, perpendiculaires à la droite Δ et, ici encore, chaque droite D passe par le barycentre G correspondant.

4. Le fait que, pour les courbes singulières telles que les barycentres G se trouvent sur les droites D correspondantes, le

point C se confond avec son barycentre cyclique lorsqu'il est pris sur la droite Δ, conduit à envisager cette question :

Existe-t-il des courbes non singulières telles que tout point de leur plan se confonde avec le barycentre cyclique correspondant?

Un point $C(\alpha, \beta)$ se confond avec son barycentre cyclique si les valeurs de ξ et η données par les formules (6) sont respectivement égales à α et β, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{aligned} \alpha(m\rho - \lambda) + \mu\beta + \nu &= 0, \\ \mu\alpha + \lambda\beta + \varpi &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations feront connaître, en général, un point jouissant de la propriété indiquée. Elles n'en donneraient une infinité que si l'on avait à la fois

$$\begin{aligned} (m\rho - \lambda)\lambda - \mu^2 &= 0, \\ (m\rho - \lambda)\varpi - \mu\nu &= 0, \\ \mu\varpi - \nu\lambda &= 0. \end{aligned}$$

On remarque d'abord que ces trois conditions se réduisent à deux, l'élimination de $m\rho - \lambda$ entre les deux premières donnant immédiatement la troisième.

Or, la première de ces égalités est identique à (7′) qui exprime que la courbe est, au point de vue qui nous occupe, singulière, c'est-à-dire que tous les barycentres cycliques sont, pour elle, distribués sur une seule droite.

La troisième de ces égalités montre, en outre, que la distance δ donnée par la formule (11) est nulle.

La question posée ci-dessus se résout donc négativement. Le résultat est celui-ci :

Il n'y a, en général, qu'un point isolé confondu avec son barycentre cyclique, sauf lorsque la courbe est singulière et que les droites D *passent par les barycentres* G *correspondants. Dans ce cas, tout point de la droite Δ est confondu avec son barycentre cyclique.*