

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BAIRE

Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 173-179

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__173_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES;

Par M. RENÉ BAIRE.

J'ai démontré dans ma Thèse (*Sur les fonctions de variables réelles*, Chapitre II; *Annali di Matematica*, 1899) que, pour qu'une fonction d'une variable soit développable en série de fonctions continues, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. M. Lebesgue a fait voir (*Comptes rendus*, 27 mars 1899) qu'on pouvait ramener le cas de n variables à celui d'une seule, et étendre ainsi à ces fonctions l'énoncé précédent. Je me propose d'exposer ici une nouvelle démonstration du fait que la condition est suffisante; cette démonstration est plus courte et plus synthétique que celle de ma Thèse (Chap. II, Sect. III), où j'employais un procédé de récurrence; elle a de plus l'avantage de s'appliquer directement au cas de n variables.

1. Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

Si une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, il existe une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$, qui a pour limite f .

Je supposerai la fonction f définie dans le domaine E (cube à n dimensions):

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Étant donné un entier quelconque p , j'appellerai *points principaux d'ordre p* les points dont les n coordonnées sont de la forme $\frac{\alpha_i}{2^p}$. On peut considérer E comme formé par la réunion de cubes Δ_p de côté $\frac{1}{2^p}$ et dont les sommets sont des points principaux d'ordre p .

J'appellerai *domaine principal d'ordre p* tout domaine D_p de la forme

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} \leq x_i \leq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et je dirai que ce domaine a pour *centre* le point principal de

coordonnées $\frac{\alpha_i}{2^p}$. (Le domaine D_p devra être réduit, dans le cas où un des nombres α_i est 0 ou 2^p , à sa portion contenue dans E.)

Tout point M de E appartient à un certain nombre de domaines D_p ; j'appelle *points principaux d'ordre p associés à M* les centres de ces domaines; ces points sont aussi les sommets des cubes Δ_p qui contiennent M. (Dans le cas général, où aucune des coordonnées de M n'est de la forme $\frac{\alpha}{2^p}$, M appartient à *un seul* cube Δ_p ; il y a donc 2^n points principaux d'ordre p associés à M.)

Cela posé, je vais démontrer que le problème de la construction des fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$, tendant vers f , peut être complètement ramené au suivant :

I. *Faire correspondre à chaque domaine principal D un nombre $\varphi(D)$ de manière à réaliser la condition A qui suit :*

A. *Étant donné un point quelconque M, si petit que soit ϵ , il existe une sphère Σ de centre M telle que, à chaque domaine principal D contenu tout entier dans Σ et contenant M, correspond un nombre $\varphi(D)$ différant de $f(M)$ de moins de ϵ .*

Supposons en effet le problème I résolu. Nous construirons f_p de la manière suivante : En chaque point principal d'ordre p, H, cette fonction aura pour valeur le nombre $\varphi(D)$ correspondant au *domaine principal D d'ordre p dont H est le centre*. Nous achèverons la définition de f_p en l'assujettissant à être continue, et à avoir, en chaque point M, *une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs aux points principaux d'ordre p associés à M*. Ces deux conditions seront réalisées si, par exemple, on prend pour f_p la fonction qui, dans chaque cube Δ_p , est *linéaire par rapport à chacune des variables*.

Je dis que, dans ces conditions, $f_p(M)$ tend vers $f(M)$ quand p croît indéfiniment. En effet, donnons-nous un nombre positif ϵ , et déterminons une sphère Σ d'après la condition A. Dès que p dépasse une certaine valeur, les domaines principaux d'ordre p qui contiennent M sont contenus tout entiers dans Σ ; par conséquent les valeurs de f_p aux points principaux d'ordre p associés à M diffèrent de $f(M)$ de moins de ϵ ; il en est de même de $f_p(M)$,

qui est compris entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs; donc $f_p(M)$ a pour limite $f(M)$.

2. Tout revient donc à résoudre le problème I.

Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple

$$(1) \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^\mu}, \quad \dots$$

Soit D un domaine principal; nous allons définir $\varphi(D)$.

Soit σ_1 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe dans D des points où l'*oscillation par rapport à* E , $\varpi(f, E)$, est $\geq \sigma_1$; soit P_1 l'ensemble des points de D où l'on a $\varpi(f, E) \geq \sigma_1$.

Si P_1^Ω existe et si la fonction n'est pas continue sur P_1^Ω , soit σ_2 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe des points où l'*oscillation par rapport à* P_1^Ω , $\varpi(f, P_1^\Omega)$, est $\geq \sigma_2$; soit P_2 l'ensemble de ces points.

On définit ainsi des ensembles fermés, tous contenus dans D :

$$(2) \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P_\omega, \dots, P_{2\omega}, \dots, P_\alpha, \dots,$$

et des nombres dont chacun fait partie de la suite (1) ou est nul :

$$(3) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots, \sigma_\omega, \dots, \sigma_{2\omega}, \dots, \sigma_\alpha, \dots$$

d'après la loi suivante :

Si α est de première espèce, σ_α et P_α s'obtiennent de $P_{\alpha-1}$, comme σ_2 et P_2 de P_1 . Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les $P_{\alpha'}$, pour lesquels $\alpha' < \alpha$; de plus, σ_α est la limite inférieure des nombres $\sigma_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$. (Il est évident que la condition $\beta > \alpha$ entraîne $P_\beta \subseteq P_\alpha$, et $\sigma_\beta \leq \sigma_\alpha$.)

J'ai démontré (Thèse, § 47) qu'étant donnée une suite d'ensembles tels que (2), il y a un nombre α tel que $P_\alpha = P_{\alpha+1}$. (La démonstration, faite pour le cas des ensembles linéaires, s'étend sans difficulté au cas d'ensembles à n dimensions.) Je dis qu'on doit avoir $P_\alpha = 0$; si, en effet, P_α existait effectivement, on aurait $P_\alpha = P_\alpha^\Omega = P_{\alpha+1}$; il existerait un nombre *positif* $\sigma_{\alpha+1}$ tel que, sur l'ensemble parfait P_α^Ω , l'oscillation en chaque point par rapport à P_α^Ω serait $\geq \sigma_{\alpha+1}$; la fonction serait totalement discontinue sur cet ensemble, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de là que, pour un

certain nombre β , ou bien P_β est dénombrable ($P_\beta^\Omega = P_{\beta+1} = \dots = 0$), ou bien P_β^Ω existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble ($P_{\beta+1} = \dots = 0$).

Dans le premier cas, il existe un nombre γ tel que P_β^γ se compose d'un nombre fini de points; on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur quelconque comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur P_β^γ .

Dans le second cas, on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur P_β^Ω .

Ainsi se trouvent définis les nombres $\varphi(D)$ et, par suite, les fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_p, \dots$. Il reste à montrer que la condition A est réalisée.

3. Soit M un point quelconque de E.

Soit τ_1 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à E, $\omega(f, E, M)$, est $\geq \tau_1$; soit Q_1 l'ensemble des points de E où l'on a $\omega(f, E) \geq \tau_1$.

Si Q_1^Ω existe et contient M, et si la fonction n'est pas continue en M par rapport à Q_1^Ω , soit τ_2 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à Q_1^Ω , $\omega(f, Q_1^\Omega, M)$, est $\geq \tau_2$; soit Q_2 l'ensemble des points de Q_1^Ω où l'on a $\omega(f, Q_1^\Omega) \geq \tau_2$.

On déduira τ_α et Q_α de $Q_{\alpha-1}$, quand α est de première espèce, comme on a déduit τ_2 et Q_2 de Q_1 . Quand α est de deuxième espèce, Q_α sera l'ensemble commun aux ensembles $Q_{\alpha'}$, tels que $\alpha' < \alpha$, et τ_α sera la limite inférieure des nombres $\tau_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

On définit ainsi des ensembles fermés contenant tous le point M:

$$(4) \quad Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots, Q_\omega, \dots, Q_{2\omega}, \dots, Q_\alpha, \dots$$

et des nombres correspondant à ces ensembles:

$$(5) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots, \tau_\omega, \dots, \tau_{2\omega}, \dots, \tau_\alpha, \dots$$

De même que précédemment, on reconnaît que les ensembles Q sont nuls à partir d'un certain indice. Il existe donc un nombre η tel que, ou bien Q_η^Ω n'existe pas, ou bien Q_η^Ω existe et ne contient pas M, ou bien Q_η^Ω contient M, la fonction étant continue en M par rapport à Q_η^Ω .

Chacun des nombres de (5) appartient à (1) (sauf peut-être le

Donc on a $\sigma_1 = \tau_1$ et, par suite, dans D, P_1 coïncide avec Q_1 . Démontrons, par voie de récurrence, qu'on a $P_\alpha = Q_\alpha$ (dans D), si $\alpha \leq \alpha_k$; il suffit d'établir la proposition quand α est de première espèce, si l'on se reporte à la définition de P_α et Q_α quand α est de deuxième espèce.

Supposons donc α de première espèce et distinguons deux cas :

1° α n'est pas l'indice du premier terme d'un des groupes (6); nous admettons qu'on a $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1}$ et $P_{\alpha-1} = Q_{\alpha-1}$; d'après l'hypothèse faite, on a $\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1}$, c'est-à-dire qu'au point M, l'oscillation par rapport à $P_{\alpha-1}^\Omega = Q_{\alpha-1}^\Omega$ est $\geq \tau_\alpha$; donc σ_α , qui ne peut surpasser $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1} = \tau_\alpha$, est identique à τ_α ; donc P_α est, dans D, identique à Q_α .

2° α est l'indice du premier terme d'un des groupes (6), soit $\alpha_{\delta+1}$ ($\delta < h$); nous admettons qu'on a $P_{\alpha_\delta} = Q_{\alpha_\delta}$; sur l'ensemble $Q_{\alpha_\delta}^\Omega$, l'oscillation au point M est supérieure ou égale à $\lambda_{\delta+1}$; comme D ne contient aucun point de $R_{\delta+1}$, ensemble des points où $\omega(f, Q_{\alpha_\delta}^\Omega) \geq \lambda'_{\delta+1}$, on a $\sigma_{\alpha_{\delta+1}} = \lambda_{\delta+1} = \tau_{\alpha_{\delta+1}}$, et, par suite, $P_{\alpha_{\delta+1}} = Q_{\alpha_{\delta+1}}$.

Cela posé, je vais établir que la condition A est réalisée pour tout point M. Distinguons deux cas :

1° Pour le point M considéré, le nombre des groupes (6) est fini, soit k ; on a $\alpha_k = \eta$; l'ensemble Q_η existe, mais on a $Q_{\eta+1} = 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut, ce cas peut se subdiviser en deux autres :

a. Q_η^Ω n'existe pas, ou bien existe, mais ne contient pas M; M fait partie d'un certain ensemble Q_η^γ sans faire partie de $Q_\eta^{\gamma+1}$: c'est un point *isolé* de Q_η^γ . Déterminons une sphère Σ de centre M ne contenant aucun point de Q_η^γ autre que M, et ne contenant aucun point de R_1, R_2, \dots, R_k . Si D est un domaine contenant M et contenu dans Σ , on a, pour ce domaine, $P_\eta = Q_\eta$; d'où $P_\eta^\gamma = Q_\eta^\gamma = M$ et $P_\eta^{\gamma+1} = 0$; donc, d'après la définition de $\varphi(D)$, on a $\varphi(D) = f(M)$.

b. M fait partie de Q_η^Ω , et la fonction est continue en M sur Q_η^Ω . Déterminons une sphère Σ ne contenant aucun point de R_1, R_2, \dots, R_k , et telle que l'oscillation de f sur la portion de Q_η^Ω contenue dans cette sphère soit $< \varepsilon$. Si D est contenu dans Σ et

contient M , on a $P_\eta^\Omega = Q_\eta^\Omega$; l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω qui intervient dans la définition de $\varphi(D)$ est certainement contenu dans Q_η^Ω ; donc $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε .

2° Les groupes (6) sont en nombre infini; ε étant donné, on peut trouver h tel que λ_h soit $< \varepsilon$. Sur l'ensemble $Q_{\alpha_h}^\Omega$, l'oscillation en M est $< \varepsilon$; on peut donc trouver une sphère Σ ne contenant aucun point de R_1, R_2, \dots, R_h et telle que l'oscillation de f sur la portion de $Q_{\alpha_h}^\Omega$ qui y est contenue soit $< \varepsilon$. De même que dans le cas b , l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω , qui sert à définir $\varphi(D)$, est contenu dans $Q_{\alpha_h}^\Omega$, et $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε .

Ainsi, dans chacun des trois cas $a, b, 2^\circ$, la condition A est réalisée; le théorème est donc établi.

4. On conçoit que le procédé de définition des nombres $\varphi(D)$, donné au § 2 pour le cas le plus général, pourrait recevoir des simplifications dans certains cas particuliers; je vais indiquer un cas remarquable où la solution peut être obtenue d'une manière extrêmement simple. J'ai démontré, dans ma Thèse, que les fonctions *semi-continues* satisfont à la condition d'être ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait, et j'en ai déduit la possibilité, pour ces fonctions, d'être développées en séries de fonctions continues; je vais établir cette proposition d'une manière beaucoup plus directe.

Supposons que f soit *semi-continue supérieurement*. Je fais correspondre à chaque domaine D un nombre $\varphi(D)$ égal au *maximum* de la fonction dans ce domaine : je dis que la condition A est ainsi réalisée. En effet, soit M un point; on peut déterminer une sphère Σ de centre M , dans laquelle on a, en tout point M' , $f(M') < f(M) + \varepsilon$. Si D est contenu dans Σ et contient M , le maximum de f dans D , c'est-à-dire $\varphi(D)$, est compris entre $f(M)$ et $f(M) + \varepsilon$. Le théorème est ainsi démontré.

Il est remarquable que cette proposition résulte ainsi, d'une manière presque immédiate, de la notion de semi-continuité : la démonstration ne nécessite pas l'emploi des résultats de la théorie des ensembles.
