

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 90-107

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__90_1

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DES QUATRIÈME ET CINQUIÈME DEGRÉS;

Par M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Soit h_n une équation algébrique de degré n , $n > 3$,

$$f(x) = x^n + \frac{n}{1!} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

où les a sont des fonctions quelconques d'une variable t . Envisageons (au point de vue des théories de Galois et de M. Jordan) comme *rationnelles par définition* :

- 1° Toutes les constantes;
- 2° Les coefficients a de h_n .

Nommons alors G le groupe (au sens de Galois) de h_n ; on supposera G transitif et h_n irréductible.

Prenons maintenant une équation U de Riccati entre u et t

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{w}_0(t) + u \mathfrak{w}_1(t) + u^2 \mathfrak{w}_2(t),$$

qui admette, par hypothèse, pour intégrales les n racines

$$x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

de h_n . Le rapport anharmonique de quatre x_i sera constant; h_n prendra le nom d'équation *anharmonique*.

Dans plusieurs Notes insérées aux *Comptes rendus* (7 mai 1883; 13 février 1899; 5 et 12 février 1900) et dans un Mémoire intitulé *Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont intégrales d'une même équation de Riccati* (*Journal de Mathématiques*, 1900), j'ai construit les équations anharmoniques qui existent pour les divers degrés n .

Cette théorie générale a pour base les propriétés des groupes de substitutions de Galois et celles des groupes linéaires fractionnaires S d'ordre fini (groupes de MM. Jordan, Klein et Gordan), c'est-à-dire provenant de substitutions

$$\left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right| \quad ad-bc \neq 0.$$

La construction effective de h_n est fondée sur les deux théorèmes suivants :

I. — *Le groupe G de h_n est isomorphe sans hémiedrie à l'un des groupes S .*

II. — *Toute h_n est de la forme $F(x, T) = 0$, où le polynôme à deux arguments F est à coefficients NUMÉRIQUES qui ne dépendent que de S . Il n'entre dans h_n qu'une fonction unique $T(t)$ de t , laquelle est rationnelle.*

La propriété de définition pour les équations anharmoniques (constance du rapport anharmonique de quatre racines quelconques) n'intervient qu'*a posteriori* et assez tardivement.

Voici maintenant ce que je me propose de montrer dans le présent Travail :

Pour les degrés peu élevés, $n = 4$ ou 5, on peut parvenir aux théorèmes I et II et construire l'anharmonique par des procédés assez élémentaires et en prenant pour point de départ la propriété de définition.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Quatrième degré.

Premier type de h_4 :

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2 = 0;$$

le rapport anharmonique K des quatre racines est équi-anharmonique; G est le groupe alterné entre quatre lettres, isomorphe au groupe S tétraédrique.

Second type de h_4 :

$$x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1) = 0;$$

K est harmonique. G est isomorphe au groupe S dérivé, pour $m = 4$, des deux substitutions (groupe S_m)

$$\theta_m = \begin{vmatrix} z & 0z \\ 0z & 1 \end{vmatrix}, \quad \theta^m = 1; \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} z & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & z \end{vmatrix}.$$

Troisième type :

$$(x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2 = 0$$

avec

$$\frac{1}{p} = (1 - T)^2 - (1 + T)^2 \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^2,$$

$$\frac{1}{q} = \frac{(1 - T)^2 - \dots}{T}.$$

G est isomorphe à S_2 .

Cinquième degré.

h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{\zeta - 2}{\zeta(\zeta - 3) + 1}, \quad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T.$$

G est isomorphe à S_5 . h_5 est une équation de Galois.

Pour l'application des théorèmes I et II et des résultats ci-dessus, il importe de spécifier ce qui suit :

Je ne considère pas comme distinctes les h_n , qui ne diffèrent que par l'intervention d'une substitution

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x & \frac{x A(t) + B(t)}{x C(t) + D(t)} \end{vmatrix},$$

$AD - BC \neq 0$; $A, B, C, D =$ rationnelles.

\mathfrak{N} ne trouble pas l'anharmonisme et ne change pas le groupe G .

Ainsi je profiterai de \mathfrak{N} pour supposer constamment nulle la

somme des racines

$$x_0 + \dots + x_{n-1} = a_1 = 0$$

et pour multiplier x par un facteur rationnel, choisi de façon à simplifier h_n .

Il va sans dire que les résultats de la présente Note sont d'accord avec la théorie générale des équations anharmoniques, exposée dans mon Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* pour 1900.

CHAPITRE I.

QUATRIÈME DEGRÉ.

1°. Le groupe général \mathfrak{G} des vingt-quatre substitutions entre quatre lettres x_1, x_2, x_3, x_4 peut être envisagé comme provenant des substitutions $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$, savoir

$$\begin{aligned} \alpha &= (12)(34), & \beta &= (13)(24), & [\alpha\beta = \beta\alpha = (14)(23)], \\ \delta &= (4)(123), & \varepsilon &= (1)(2)(34). \end{aligned}$$

Si ε manque, \mathfrak{G} se réduit au groupe alterné d'ordre douze; si δ manque, \mathfrak{G} se réduit à un groupe d'ordre huit; si δ et ε manquent simultanément, \mathfrak{G} se réduit au groupe g des quatre substitutions $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$.

2°. Posons

$$\{ij\} = x_i - x_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4;$$

considérons le rapport anharmonique

$$K = K_0 = \frac{\{31\}\{42\}}{\{32\}\{41\}}$$

des x_i et la façon dont K se transforme par les substitutions de \mathfrak{G} .

Soient

$$\tau_1 = \{23\}\{14\}, \quad \tau_2 = \{31\}\{24\}, \quad \tau_3 = \{12\}\{34\}, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Voici la façon dont $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ transforment les τ :

α et β n'altèrent pas τ_1, τ_2 ni τ_3 ; ensuite

$$\delta = (\tau_1 \tau_2 \tau_3) \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \tau_1 & -\tau_2 \\ \tau_2 & -\tau_1 \\ \tau_3 & -\tau_3 \end{vmatrix},$$

Nommons $\delta[K]$, ..., ce que devient K par l'effet de δ , ..., il viendra

$$\delta[K_0] = \delta\left[-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right] = -\frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2} = \frac{K_0 - 1}{K_0} = K_1,$$

$$\delta[K_1] = -\frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1}{1 - K_0} = K_2, \quad \delta[K_2] = K_0,$$

$$\varepsilon[K_0] = -\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{K_0} = K_3,$$

$$\varepsilon[K_1] = -\frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{1}{K_2} = K_4,$$

$$\varepsilon[K_2] = -\frac{\tau_2}{\tau_3} = \frac{1}{K_1} = K_5,$$

3°. Les déplacements des six lettres K_0, \dots, K_5 forment un groupe \mathfrak{H} d'ordre six, isomorphe avec hémiedrie au groupe $\mathfrak{S}(1^\circ)$.

A la substitution unité de \mathfrak{H} correspond dans \mathfrak{S} le groupe g ; δ a pour correspondante

$$\mathfrak{S} = (K_0 K_1 K_2)(K_3 K_4 K_5)$$

et ε a aussi pour correspondante

$$\mathfrak{E} = (K_0 K_3)(K_1 K_4)(K_2 K_5).$$

Se reportant à ma Note *Sur le rapport anharmonique*, insérée aux *Nouvelles Annales*, 1899, on verra que, lorsque les six quantités K_0, \dots, K_5 ne sont pas toutes distinctes, les quatre x étant toutes inégales, il ne peut se présenter que deux éventualités.

Cas équianharmonique. — $K_0 = K_1 = K_2$; $K_3 = K_4 = K_5$ et $K_0^2 - K_0 + 1 = 0$, d'où

$$K_0 = K_1 = K_2 = -\rho, \quad K_3 = K_4 = K_5 = -\rho^2$$

(ρ = racine primitive cubique de l'unité).

Cas harmonique. — Ce cas se décompose en trois :

$$K_0 = K_3 = -1, \quad K_1 = K_4 = -2, \quad K_2 = K_5 = -\frac{1}{2};$$

$$K_0 = K_5 = -2, \quad K_1 = K_3 = -\frac{1}{2}, \quad K_2 = K_4 = -1;$$

$$K_0 = K_5 = -\frac{1}{2}, \quad K_1 = K_4 = -1, \quad K_3 = K_2 = -2.$$

4°. Soit

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0$$

l'équation du quatrième degré dont les x sont racines. Introduisons les deux invariants

$$I = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2),$$

$$J = 6(a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4)$$

et l'invariant absolu

$$\Omega = I^3 J^{-2}$$

lié au rapport anharmonique K par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K + 1)(K - 2)(2K - 1)]^2}$$

(voir les *Leçons sur la Géométrie de Clebsch*, traduction A. Benoit, Tome I, pages 284, 285, 297).

Dans le cas équi-anharmonique

$$\Omega = I = 0, \quad K^2 - K + 1 = 0;$$

dans le cas harmonique

$$\Omega = \infty, \quad J = 0, \quad (K + 1)(K - 2)(2K - 1) = 0.$$

Il est évident d'ailleurs que les deux cas s'excluent mutuellement.

5°. Soient maintenant une anharmonique h_4 , $f(x) = 0$, et G son groupe entre les quatre racines x_i ($i = 1, 2, 3, 4$). G sera contenu dans le groupe \mathfrak{S} du 1° ou coïncidera avec \mathfrak{S} .

On pourra écrire, sous le bénéfice des explications données dans l'Introduction,

$$f(x) = x^4 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4.$$

Le polynome $f(x)$ aura les deux invariants (4°)

$$I = 2(a_4 + 3 a_2^2), \quad J = 6(a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3),$$

puisque $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Le rapport anharmonique K lié à l'invariant absolu $\Omega = I^3 J^{-2}$ par la relation

$$\Omega = 24 \frac{(K^2 - K + 1)^3}{[(K + 1)(K - 2)(2K - 1)]^2} \quad (4^\circ)$$

est constant, c'est-à-dire rationnel. K ne doit pas changer par l'intervention des substitutions de G .

6°. Si G contient la substitution ternaire $\delta = (4)(123)$ du 1°, on a

$$\Omega = I = 0.$$

Il faut, en effet, alors que (3°)

$$K_0 = K_1 = \dots, \quad K_0^2 - K_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega = 0.$$

Si G contient la substitution binaire $\varepsilon = (1)(2)(34)$ du 1°, on a

$$\Omega = \infty, \quad J = 0.$$

En effet, alors (3°)

$$K_0 = K_3, \quad K_0 + 1 = 0.$$

Comme les cas équi-anharmonique et harmonique s'excluent mutuellement, on voit que G est contenu :

soit dans le groupe alterné entre quatre lettres, dérivé de α, β, δ , avec $I = 0$,

soit dans le groupe d'ordre huit, dérivé de $\alpha, \beta, \varepsilon$, avec $J = 0$,

soit dans le groupe g d'ordre quatre, dérivé de α et β , $IJ \neq 0$.

Je dirai que l'anharmonique h_4 est équi-anharmonique si $I = 0$, harmonique si $J = 0$.

Je vais m'occuper de la construction des h_4 équi-anharmonique et harmonique.

7°. Dans h_4 le coefficient a_3 ne peut être nul et h_4 ne peut devenir bicarrée.

Les quatre racines seraient dans ce cas $u, v, -u, -v$. Exprimons qu'elles sont intégrales de l'équation U de Riccati; il viendra

$$\begin{aligned} u' &= \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1 u + \mathfrak{U}_2 u^2 & - u' &= \mathfrak{U}_0 - \mathfrak{U}_1 u + \mathfrak{U}_2 u^2, \\ v' &= \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1 v + \mathfrak{U}_2 v^2 & - v' &= \mathfrak{U}_0 - \mathfrak{U}_1 v + \mathfrak{U}_2 v^2, \end{aligned}$$

puis

$$0 = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_2 u^2 = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_2 v^2.$$

Comme on ne peut avoir $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_2 = 0$, sans quoi l'on n'aurait

plus une équation de Riccati, il vient $u^2 - v^2 = 0$ et h_4 aurait des racines égales.

8°. Si $a_2 = 0$, h_4 ne peut être ni harmonique, ni équianharmonique. En effet alors

$$a_2 = 0, \quad I = 2a_4, \quad J = -6a_3^2.$$

Pour $I = 0$, $a_4 = 0$, et il y aurait une racine nulle; pour $J = 0$, $a_3 = 0$, ce qui est absurde (7°). c. q. f. d.

Je supposerai donc, pour la construction des h_4 équianharmonique et harmonique, $a_2 a_3 \neq 0$.

9°. Multiplions, ce qui est licite (Introduction) x par le facteur rationnel r^{-1} ; h_4 devient

$$x^4 + 6a_2 r^2 x^2 + 4a_3 r^3 x + r^4 a_4 = 0.$$

Posons

$$T = a_2 r^2 = a_3 r^3,$$

d'où, puisque

$$a_2 a_3 \neq 0, \quad r = a_2 a_3^{-1}, \quad T = a_2^3 a_3^{-2}$$

et

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + \mathfrak{C} = 0, \quad \mathfrak{C} = a_4 a_2^4 a_3^{-4}.$$

Alors

$$I = 2(\mathfrak{C} + 3T^2), \quad J = 6(T\mathfrak{C} - T^3 - T^2).$$

Si

$$I = 0, \quad \mathfrak{C} = -3T^2,$$

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx - 3T^2.$$

Si

$$J = 0, \quad \mathfrak{C} = T^2 + T,$$

$$f(x) = x^4 + 6Tx^2 + 4Tx + T(T+1).$$

Dans l'un et l'autre cas $f(x)$ est un polynôme en x et T à coefficients numériques. C'est un résultat annoncé dans l'Introduction.

10°. Passons maintenant aux h_4 , où $IJ \neq 0$ et dont le groupe G coïncide avec le groupe g des quatre substitutions 1, α , β , $\alpha\beta$ (6°).

On aura d'abord

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - (x_3 + x_4) \neq 0,$$

sans quoi

$$0 = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

et h_4 serait bicarrée, ce qui est absurde (7°).

L'expression

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = 2^4 p,$$

invariable par α et β , est rationnelle; il en est de même pour

$$(o) \quad \begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = 2q \\ \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = \frac{1}{2} r. \end{cases}$$

De là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{p} \\ x_3 + x_4 = -2\sqrt{p} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 x_2 = q + r\sqrt{p} \\ x_3 x_4 = q - r\sqrt{p} \end{cases}$$

et

$$(o') \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{p - q - r\sqrt{p}} = g + h \\ x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{p - q - r\sqrt{p}} = g - h \\ x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{p - q + r\sqrt{p}} = -g + K \\ x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{p - q + r\sqrt{p}} = -g - K \end{cases}$$

$$g^2 = p \quad h^2 = p - q - r\sqrt{p} \\ K^2 = p - q + r\sqrt{p}.$$

11°. On peut faire $r = 1$. D'abord $r \neq 0$, sinon, par les formules (o') du 10°, $h = K$, $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$ et h_4 deviendrait bicarrée (7°).

Multiplions, ce qui est licite, x par r . On pourra diviser par r les deux membres de l'égalité (o) du 10°, ce qui revient à faire $r = 1$.

12°. Formons le rapport anharmonique

$$K = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Par les formules (o') du 10°, il viendra, tout calcul fait,

$$K = \frac{p + q + \Delta}{p + q - \Delta},$$

$\Delta^2 = (p - q)^2 - p$, puisque $r = 1$, et enfin

$$(1) \quad (p - q)^2 - p = (p + q)^2 \left[\frac{K - 1}{K + 1} \right]^2.$$

Comme (10^o) $p \neq 0$, je poserai $q = pT$ et (1) devient

$$(2) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{(1-T)^2 - \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2 (1+T)^2} \\ q = \frac{T}{(1-T)^2 - \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2 (1+T)^2}. \end{cases}$$

13^o. Construisons maintenant h_4 avec les formules du 10^o. On a, puisque $R = 0$,

$$\begin{aligned} x_1 - g &= h, & g^2 &= p, \\ h^2 &= p - q - g, & K^2 &= p - q + g, \end{aligned}$$

d'où successivement

$$\begin{aligned} x_1^2 + p - 2x_1g &= h^2 = p - q - g, \\ x_1^2 + q &= g(2x_1 - 1), \\ (x_1^2 + q)^2 &= p(2x_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Toute autre racine donnerait le même résultat, et il vient pour h_4

$$f(x) = (x^2 + q)^2 - p(2x - 1)^2.$$

Mais, par les formules (2) du 12^o, p et q sont rationnels en T et $f(x)$ est encore un polynôme en x et T à coefficients numériques.

14^o. On sait que tous les groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, appartiennent à cinq types différents :

I. *Circulaire* (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein), dérivé de l'unique substitution

$$\Theta_m = \begin{vmatrix} z & Rz \end{vmatrix}, \quad R^m = 1.$$

II. *Pyramidal*, dérivé de Θ_m et de

$$\begin{vmatrix} z & z^{-1} \end{vmatrix},$$

(*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein).

III. *Tétraédrique*, isomorphe sans hémiedrie au groupe alterné entre quatre lettres.

IV. *Octaédrique*, isomorphe sans hémiedrie au groupe général \mathfrak{S}_4 (1^o) entre quatre lettres.

V. *Icosaédrique*, isomorphe sans hémiedrie au groupe alterné entre cinq lettres.

Or, dans le cas actuel, le groupe G de h_4 possède, en vertu de la discussion précédente, les propriétés suivantes :

Si h_4 est équi-anharmonique, G est le groupe alterné entre quatre lettres.

Si h_4 est harmonique, G provient de \mathfrak{G} par la suppression de δ (1°); G est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 4$.

Si h_4 n'est ni harmonique ni équi-anharmonique, G dérive des substitutions α et β , $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ et est isomorphe au groupe pyramidal pour $m = 2$.

On retrouve ainsi des résultats annoncés dans l'Introduction.

CHAPITRE II.

CINQUIÈME DEGRÉ.

15° . Soit maintenant une h_5 , dont x_0, x_1, \dots, x_4 seront les cinq racines. Nommons G , le groupe de h_5 et G_0 le groupe des substitutions de G qui laissent x_0 immobile. Ces dernières doivent laisser fixe le rapport anharmonique

$$K^{-1} = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Je suppose que l'on ait démontré (ce qui se fera un peu plus loin) que K n'est ni harmonique ni équi-anharmonique. Alors G_0 ne pourra contenir (Chapitre I) ni $\delta = (1\ 2\ 3)(4)$ ni $\varepsilon = (1)(2)(3\ 4)$ et se réduira à g ou à un groupe contenu dans g . Ainsi G ne contiendra aucune substitution laissant immobile plus d'une racine; toutes les racines s'exprimeront rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, et, comme le degré est premier, h_5 sera une équation de Galois.

G étant transitif a son ordre divisible par cinq et contient la substitution circulaire

$$\sigma = (0\ 1\ 2\ 3\ 4) = [i, i+1] \pmod{5},$$

entre les cinq racines x_i , ($i = 0, 1, \dots, 4$). G s'obtient en com-

binant avec σ la substitution

$$\tau = |i, li| \pmod{5}.$$

Comme τ est contenue dans g , on a

$$\begin{aligned} \tau^2 &= 1, & l^2 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ l &\equiv 4 \pmod{5}, \\ \tau &= |i, 4i| = (0)(14)(23) = \alpha\beta, \\ \tau^{-1}\sigma\tau &= \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

G contient les dix substitutions

$$\sigma^k \text{ et } \tau\sigma^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

G est isomorphe, pour $m = 5$, au groupe pyramidal S du 14°.

16°. Reste à montrer que K n'est ni harmonique ni équi-anharmonique.

Posons

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \{14\}, & \mu_1 &= \{20\}, & \mu_2 &= \{31\}, & \mu_3 &= \{42\}, & \mu_4 &= \{03\}, \\ \{ij\} &= x_i - x_j. \end{aligned}$$

La substitution σ , qui ne saurait manquer dans le groupe G , permute les μ circulairement :

$$\sigma = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

On a

$$x_0 + \dots + x_4 = 0,$$

et aussi

$$\mu_0 + \dots + \mu_4 = 0.$$

Enfin par un calcul facile

$$o) \quad \begin{cases} 5x_0 = 2(\mu_4 - \mu_1) + \mu_2 - \mu_3, \\ 5x_1 = 2(\mu_0 - \mu_2) + \mu_3 - \mu_4, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Posons ensuite

$$\begin{aligned} a &= \mu_2\mu_3, & b &= \mu_3\mu_4, & c &= \mu_4\mu_0, & d &= \mu_0\mu_1, \\ e &= \mu_1\mu_2, & \mu &= \mu_0\dots\mu_4, \end{aligned}$$

d'où

$$\mu^2 = abcde,$$

et

$$\mu\mu_1 = bde, \quad \mu\mu_2 = cea, \quad \mu\mu_3 = dab, \quad \mu\mu_4 = ebc, \quad \mu\mu_0 = acd.$$

Remplaçant dans les formules (o) les μ par leurs valeurs, il viendra

$$(1) \quad \begin{cases} 5\mu x_0 = 2be(c-d) + a(ec-bd), \\ 5\mu x_1 = 2ca(d-e) + b(da-ce), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

par permutation circulaire des cinq lettres a, b, c, d et e .

Remarquons que, si

$$a = b = c = d = e, \quad \mu x_0 = \mu x_1 = \dots = \mu x_4 = 0;$$

or

$$\mu^2 = abcde \neq 0;$$

il viendrait

$$x_0 = \dots = x_4 = 0,$$

ce qui est absurde. Aucune des cinq lettres a, \dots, e n'est zéro, car alors une des cinq lettres μ_0, \dots, μ_4 , serait nulle et h_5 aurait des racines égales.

17°. On a

$$K^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 42 \\ 32 & 41 \end{vmatrix}}{\mu_0(\mu_1 + \mu_4)} = \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_0(\mu_1 + \mu_4)} = \frac{a}{d+c} \\ -Ka + c + d = 0.$$

La substitution σ de G permute circulairement a, \dots, e tout en laissant K invariable. Il vient ainsi le système des cinq équations linéaires homogènes

$$(2) \quad \begin{cases} -Ka + c + d = 0, \\ -Kb + d + e = 0, \\ a - Kc + e = 0, \\ a + b - Kd = 0, \\ b + c - Ke = 0. \end{cases}$$

Aucune des a, \dots, e n'est zéro (16°); donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} -K & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -K & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -K & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -K \end{vmatrix} = (K-2)(K^2 + K - 1)^2 = 0.$$

Si $K = 2$, $a = b = \dots = e$, ce qui est absurde (16° *in fine*).
Ainsi

$$K^2 + K - 1 = 0.$$

Nommons θ une racine primitive cinquième de l'unité et soit
 $\rho = \theta + \theta^4$, $\rho^2 = 2 + \theta^2 + \theta^3$ et, en vertu de $\theta^4 + \dots + \theta + 1 = 0$,
 $\rho^2 + \rho - 1 = 0$. Les deux valeurs de K sont donc

$$K = \theta + \theta^4 \quad \text{et} \quad K = \theta^2 + \theta^3.$$

On n'est ni dans le cas équi-harmonique ni dans le cas harmonique.
C. Q. F. D.

18°. Si on annule $K^2 + K - 1$, en faisant par exemple $K = \theta + \theta^4$, tous les premiers mineurs du déterminant Δ (17°) sont nuls; a, b, c, d, e s'expriment en vertu des équations (2) du 17°, par des fonctions linéaires, homogènes, à coefficients numériques, de deux indéterminées u et v . Les substitutions σ et τ du groupe G (15°) se traduisent sur u et v par les deux substitutions linéaires homogènes s et \bar{s} . On peut toujours supposer s mise sous forme canonique; comme $\sigma^5 = 1$, $s^5 = 1$ et

$$s = \begin{vmatrix} u & \theta^2 u \\ v & \theta^3 v \end{vmatrix}.$$

Comme $\tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$, on a aussi $\bar{s}^2 = 1$, $\bar{s}s\bar{s} = s^{-1}$ c'est-à-dire, par un calcul facile,

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}$$

et

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{5}.$$

\bar{s} doit permuter a, b, \dots, e de la façon suivante

$$\tau = (a)(be)(cd)$$

et s ainsi

$$\sigma = (abcde).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} a &= u + v, & c &= \theta^2 \alpha u + \theta^2 \beta v, \\ b &= \theta^2 \alpha u + \theta^2 \beta v, & d &= \theta^3 \alpha u + \theta^3 \beta v, \\ e &= \theta^4 \alpha u + \theta^4 \beta v, \end{aligned}$$

Portons dans la première des équations (2) du 17^o, il viendra

$$Ka = c + d,$$

$$(1 + \theta^4)(u + v) = (\theta^{2\alpha} + \theta^{3\alpha})u + (\theta^{2\beta} + \theta^{3\beta})v,$$

d'où

$$\alpha \equiv 2, \quad \beta \equiv 3 \quad (\text{mod } 5)$$

ou bien

$$\alpha \equiv 3, \quad \beta \equiv 2 \quad (\text{mod } 5).$$

Je prendrai $\alpha \equiv 2$. On aura ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} a = u + v, \\ b = \theta^2 u + \theta^3 v, \\ c = \theta^4 u + \theta v, \\ d = \theta u + \theta^4 v, \\ e = \theta^3 u + \theta^2 v. \end{cases}$$

L'équation du cinquième degré qui admet a, b, c, d, e pour racines est

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^5 - 5uv\lambda^3 + 5u^2v^2\lambda - (u^5 + v^5) = 0.$$

19^o. Ainsi les deux substitutions $\sigma = (01234)$ et $\tau = (0)(14)(23)$ de G se traduisent sur les μ par les deux substitutions $(\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$ et

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ -\mu_0 & -\mu_4 & -\mu_3 & -\mu_2 & -\mu_1 \end{vmatrix};$$

sur les a, \dots, e par les deux substitutions $(abcde)$ et $(a)(be)(cd)$; sur u et v par les deux substitutions

$$S = \begin{vmatrix} u & \theta^2 u \\ v & \theta^3 v \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} u & v \\ v & u \end{vmatrix}.$$

Enfin $\mu = \mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$, $\mu^2 = abcde$, reste invariable par σ et change de signe par τ .

Les deux expressions $u^5 + v^5 = p$ et $uv = q$ sont invariables par S et \mathfrak{C} , c'est-à-dire par toutes les substitutions de G . p et q sont donc *rationnelles*.

Les deux quantités d'un des cinq couples

$$\begin{aligned} a, & x_0, \\ b, & x_1, \\ c, & x_2, \\ d, & x_3, \\ e, & x_4, \end{aligned}$$

sont invariables par les mêmes substitutions de G. Donc

$$x_0 = \psi(a),$$

ψ désignant une fraction rationnelle à coefficients rationnels. Effectuons la substitution σ sur l'expression

$$x_0 - \psi(a),$$

qui est nulle, c'est-à-dire à valeur rationnelle, on aura

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi(b), \\ &\dots\dots\dots, \\ x_4 &= \psi(e). \end{aligned}$$

Construisons ψ .

20°. Portons les valeurs de a, \dots, e données par les formules (1) du 18°, dans les formules (1) du 16°. Il viendra, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} 5\mu x_0 &= R(u - v)(u^2 + v^2), \\ R &= 2(\theta^2 - \theta^3) + \theta - \theta^4. \end{aligned}$$

L'expression $\frac{u^5 - v^5}{\mu} = r$ est invariable par toutes les substitutions de G, c'est-à-dire rationnelle.

Le quotient $(u^5 - v^5)(u - v)^{-1}$ est égal à

$$u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4 = u^4 + v^4 + uv(u^2 + v^2) + u^2v^2.$$

Or

$$uv = q, \quad u + v = a;$$

donc

$$\frac{u^5 - v^5}{u - v} = a^2(a^2 - 3q) + q^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R(u-v)(u^2+v^2)}{5\mu} = \frac{Rr(u-v)(u^2+v^2)}{5(u^5-v^5)} \\ &= \frac{rR}{5} \cdot \frac{a^2-2q}{a^2(a^2-3q)+q^2} = \psi(a); \end{aligned}$$

d'où

$$\psi(X) = \frac{rR}{5} \cdot \frac{X^2-2q}{X^2(X^2-3q)+q^2},$$

X étant une indéterminée.

21°. Posons $a^2 = q\zeta$, on aura

$$x_0 = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}$$

Mais a est racine de l'équation (18° *in fine*)

$$\Lambda(a) = a(a^4 - 5qa^2 + 5q^2) - p = 0,$$

puisque

$$uv = q, \quad u^5 + v^5 = p \quad (19^\circ).$$

Alors

$$\begin{aligned} q^2 a(\zeta^2 - 5\zeta + 5) &= p \\ \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 &= \frac{p^2}{q^5} = T. \end{aligned}$$

Si, au lieu de raisonner sur x_0 et a , on avait raisonné sur x , et b , x_2 et c , ... on aurait eu les mêmes résultats.

22°. En résumé, l'équation h_5 s'obtient en éliminant ζ entre les deux équations

$$x = \frac{Rr}{5q} \cdot \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}, \quad \zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T.$$

Il est licite de multiplier tous les x par le facteur rationnel

$$\frac{Rr}{5q};$$

cela revient à faire $\frac{Rr}{5q} = 1$.

On a à éliminer ζ entre

$$\zeta(\zeta^2 - 5\zeta + 5)^2 = T \quad \text{et} \quad x = \frac{\zeta-2}{\zeta(\zeta-3)+1}.$$

Le résultant est bien un polynome du cinquième degré entre ζ

et T à coefficients numériques. La relation algébrique entre x et T est du degré zéro.

23°. L'équation du cinquième degré qui vient d'être construite est-elle effectivement une anharmonique? Autrement dit, tous les rapports anharmoniques formés avec quatre racines quelconques sont-ils constants?

Il faut répondre par l'affirmative. Donnons, en effet, le nom de \mathfrak{u}_i au système des six rapports anharmoniques distincts, formés par les quatre racines autres que x_i . On a vu au Chapitre I que tous les termes de \mathfrak{u}_i sont des fonctions rationnelles à coefficients numériques d'un quelconque d'entre eux.

Toute l'analyse du présent Chapitre II a eu pour but de montrer la constance du rapport anharmonique K du 15°. K est un terme de \mathfrak{u}_0 . La substitution σ de G , qui permute circulairement les cinq systèmes \mathfrak{u}_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) ne change pas la valeur numérique constante, c'est-à-dire rationnelle, de K . Chacun des cinq systèmes \mathfrak{u}_i a un terme constant, c'est-à-dire tous ses termes constants.

C. Q. F. D.

Nous avons ainsi établi les résultats annoncés dans l'Introduction.
