

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Sur une application des fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 52-55

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__52_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__52_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. le comte DE SPARRE.

Pour résoudre le problème du mouvement d'un projectile lorsque la résistance du milieu est proportionnelle au cube de la vitesse, MM. Appell et Lacour (*Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 232) ont donné des développements suivant les puissances ascendantes positives et entières de u . Nous nous proposons de démontrer que le rayon de convergence de ces séries n'est pas très considérable. Nous emploierons les notations du *Précis* de M. L. Lévy, p. 121 à 133.

1° La quantité ν (page 124 du *Précis*) définie par les équations

$$p(\nu) = \frac{1}{3}, \quad p'(\nu) = \frac{1}{3} \sin \varphi,$$

satisfait aux inégalités

$$(1) \quad \omega_1 < \nu < \frac{4\omega_1}{3}.$$

En effet ν étant supposé réel, positif et plus petit que $2\omega_1$, est plus grand que ω_1 puisque $p'(\nu)$ est positif (nous supposons φ positif).

De plus ν étant réel et compris entre ω_1 et $2\omega_1$, pour prouver que $\nu < \frac{4\omega_1}{3}$ il suffit de faire voir que

$$p(\nu) < p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right).$$

Or

$$2\frac{4\omega_1}{3} = \frac{8\omega_1}{3} = 4\omega_1 - \frac{4\omega_1}{3},$$

d'où

$$p\left(2\frac{4\omega_1}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right).$$

Par suite la formule (84)

$$p(2u) + 2p(u) = \frac{1}{4} \frac{p'^2(u)}{p^2(u)} = \frac{9p'^4(u)}{4p^2(u) - g_3}$$

donne

$$3p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right) = \frac{9p^3\left(\frac{4\omega_1}{3}\right)}{4p^3\left(\frac{4\omega_1}{3}\right) -}$$

ou

$$p^3\left(\frac{4\omega_1}{3}\right) = g_3.$$

Donc en remplaçant g_3 par sa valeur

$$p\left(\frac{4\omega_1}{3}\right) = \sqrt[3]{g_3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4 - 3\sin^2\varphi} > \frac{1}{3} = p(v)$$

Donc

$$v < \frac{4\omega_1}{3},$$

et la seconde des inégalités (1) est démontrée;

2° Les séries qui donnent le développement de g et t suivant les puissances entières et ascendantes de u sont convergentes tant que le module de u est inférieur au module du zéro de la fonction

$$p'(v) - p'(u)$$

dont le module est minimum.

Or les zéros de cette fonction sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} v + m(\omega_1 + \omega_2) + n(\omega_1 - \omega_2), \\ \alpha v + m'(\omega_1 + \omega_2) + n'(\omega_1 - \omega_2), \\ \alpha^2 v + m''(\omega_1 + \omega_2) + n''(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

où α est une racine cubique imaginaire de l'unité et m, m', m'', n, n', n'' des entiers quelconques.

Mais si l'on remplace α par sa valeur et si l'on tient compte que, dans le cas actuel, $\omega_2 = \omega_1 i\sqrt{3}$, ces zéros pourront s'écrire

$$(2) \quad v + (2m - p)\omega_1 + p\omega_1 i\sqrt{3},$$

$$(3) \quad (2m' + p')\omega_1 - \frac{v}{2} + \left(\frac{v}{2} - p'\omega_1\right)i\sqrt{3},$$

$$(4) \quad (2m'' - p'')\omega_1 - \frac{v}{2} + \left(p''\omega_1 - \frac{v}{2}\right)i\sqrt{3},$$

où p, p', p'' sont aussi des entiers quelconques.

Pour les zéros (2) le carré du module est

$$(5) \quad [\nu + (2m - p)\omega_1]^2 + 3p^2\omega_1^2.$$

Mais on déduit des inégalités (1)

$$\omega_1 > 2\omega_1 - \nu > \frac{2\omega_1}{3},$$

et ceci fait voir que l'expression (5) sera minima pour $p = 0$, $m = -1$. Le module est alors égal à $2\omega_1 - \nu$.

Pour les zéros (3) et (4) les carrés des modules sont

$$(6) \quad \left[(2m' + p')\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right]^2 + 3 \left(p'\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right)^2,$$

$$(7) \quad \left[(2m'' - p'')\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right]^2 + 3 \left(p''\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right)^2.$$

On déduit d'ailleurs des inégalités (1)

$$\frac{\omega_1}{2} < \frac{\nu}{2} < \frac{2\omega_1}{3},$$

et par suite

$$(8) \quad \frac{\omega_1}{3} < \omega_1 - \frac{\nu}{2} < \frac{\omega_1}{2} < \frac{\nu}{2}.$$

Ces dernières inégalités font voir que l'expression (6) est minima pour $m' = 0$, $p' = 1$ et l'expression (7) pour $m'' = 1$, $p'' = 1$.

Elles sont alors égales l'une et l'autre à $4 \left(\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right)^2$.

Le minimum du module des zéros (3) et (4) est donc encore $2 \left(\omega_1 - \frac{\nu}{2} \right) = 2\omega_1 - \nu$. Donc les séries qui nous occupent ne sont convergentes que jusqu'à la valeur $u = 2\omega_1 - \nu$.

Mais on a

$$p(2\omega_1 - \nu) = p(\nu) = \frac{1}{3}.$$

$$p'(2\omega_1 - \nu) = -p'(\nu) = -\frac{1}{3} \sin \varphi.$$

On aura par suite (formule t' , p. 124)

$$p = \frac{2}{\sin \varphi - 3p'(u)} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

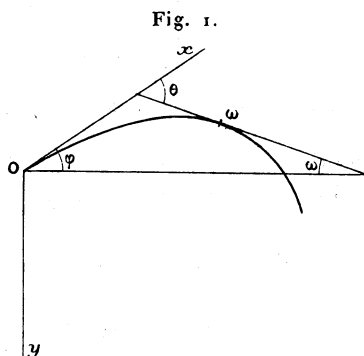
D'ailleurs si θ est l'angle de la tangente à la trajectoire avec ox , on a (fig. 1)

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{p \cos \varphi}{1 - p \sin \varphi},$$

donc dans le cas actuel on aura

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si donc ω désigne l'inclinaison de la tangente en valeur absolue,



on aura $\omega = \theta - \varphi$, donc dans le cas actuel

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Donc, en résumé, les séries deviennent divergentes pour le point situé au delà du sommet où l'inclinaison de la tangente est $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ étant l'inclinaison de la tangente au point de vitesse infini). Si l'on remarque que les séries ont en général une convergence trop faible pour pouvoir être utilement employées, bien avant leur point de divergence, on voit que les séries de MM. Appell et Lacour seront rarement utilisables, dès que le tir aura lieu sous un angle un peu considérable, surtout si la vitesse initiale n'est pas grande.