BULLETIN DE LA S. M. F.

LÉMERAY

# Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 27 (1899), p. 130-137
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__130_0>

## SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES QUI CARACTÉRISENT LES OPÉRATIONS ASSOCIATIVES ET LES OPÉRATIONS DISTRIBUTIVES;

Par M. Lémeray.

Dans une Communication précédente [1], j'ai considéré les algorithmes d'une même série [N]; ce sont ceux qui expriment les itérées successives d'une fonction donnée

$$y = \mathrm{N}(a, x),$$

de la variable $x$ et d'un paramètre $a$. Si l'on se donne, pour $\mathrm{N}(a, x)$, la fonction $a + x$, on obtient la suite des algorithmes naturels : addition, multiplication, élévation aux puissances ...; de sorte qu'expliciter une fonction au moyen des signes usuels, c'est pouvoir l'exprimer par les fonctions directes et inverses définies par les itérées de l'addition [2].

On peut généraliser ce point de vue en choisissant pour $\mathrm{N}(a, x)$, non plus $a + x$, mais une autre fonction. Les algorithmes que l'on formera ainsi constitueront une série différente, en général, de la série usuelle, et permettront d'expliciter un certain nombre de fonctions.

Je vais donner une application des fonctions générales puissances-P, puissances-$p$, etc., considérées dans ma Note précédente, aux solutions de quelques équations fonctionnelles.

Abel [3] a étudié l'équation (I), et a ramené sa solution à une quadrature; plus récemment M. Bourlet [4] a considéré les équations (III) et (V); il a montré qu'elles se ramènent à celle d'Abel et a donné leur condition de possibilité.

La solution de ces équations se rattache étroitement au problème de l'itération.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, 1898, p. 10.

[2] Les théorèmes concernant l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances se tirent comme cas particuliers des théorèmes de ma Note précédente. C'est en cherchant à atteindre ce résultat, que j'ai été amené à considérer les algorithmes d'une même série. (*Voir* aussi : *Assoc. française*, Bordeaux, 1895.)

[3] *Œuvres complètes*, t. I, Mémoire VI.

[4] *Annales de l'École Normale*, avril-mai 1897.

1. *Equation d'Abel.* — Cette équation est la suivante

$$(\mathrm{I}) \qquad \varphi f(x,y) = \varphi x + \varphi y;$$

si $\varphi$ est donné, il existe toujours des fonctions $f$ qui y satisfont. En effet, l'on a

$$f(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi x + \varphi y).$$

Remplaçons dans le deuxième membre $y$ par $f(y, z)$, on a

$$f[x, f(y,z)] = \varphi^{-1}[\varphi x + \varphi\varphi^{-1}(\varphi y + \varphi z)],$$

et, comme $\varphi\varphi^{-1} u = u$,

$$f[x, f(y,z)] = \varphi^{-1}(\varphi x + \varphi y + \varphi z);$$

le deuxième membre étant symétrique en $x$, $y$, $z$, il doit en être de même pour le premier. Donc, quand $f$ est donnée et qu'on cherche $\varphi$, il faut que $f$ présente ce genre de symétrie reconnue par Abel. La condition est d'ailleurs suffisante. D'après la définition de la commutativité et de l'associativité, *les fonctions $f$ qui présentent la symétrie abélienne sont associatives et commutatives* [1].

Prenons les notations générales déjà employées, et posons

$$\varphi x = (\mathrm{N}+1)(a, -1; x),$$

alors

$$\varphi^{-1} x = (\mathrm{N}+1)(a, 1; x) = \mathrm{N}(a, x) \qquad \text{(par définition)},$$

et $f(x, y)$ peut s'écrire

$$f(x,y) = \mathrm{N}[a, (\mathrm{N}+1)(a, -1; x) + (\mathrm{N}+1)(a, -1; y)];$$

or,

$$\mathrm{N}(a, p+q) = \mathrm{N}[a, p; \mathrm{N}(a, q)];$$

donc

$$f(x,y) = \mathrm{N}\{a, (\mathrm{N}+1)(a, -1; x); \mathrm{N}[a, (\mathrm{N}+1)(a, -1; y)\}.$$

On voit que, si l'on considère, ce que l'on peut toujours faire, $\varphi x$ comme un logarithme-$l$ de mode N, $f(x, y)$ est le produit-M de même mode; les fonctions, produits-M, possèdent la symétrie abélienne.

---

[1] Les fonctions définies par les opérations associatives et commutatives jouissent évidemment de la propriété d'être *indéfiniment symétriques* au sens employé par M. Bourlet (*loc. cit.*).

Considérons maintenant le problème inverse. On vérifiera d'abord que $f(x,y)$ est un produit-M. Il y aura ensuite à voir quel est le mode N de ce produit; alors la fonction cherchée $\varphi x$ sera le logarithme-$l$ de mode N. Pour trouver le mode de $f(x,y)$, il suffit de l'itérer; d'après notre Note précédente, cette itération fournira la puissance-$p$ de mode N. Remplaçons $y$ par $y_0$ et itérons par rapport à $y_0$; c'est-à-dire calculons $f[x, f(x, y_0)]$, $f[x, f(x \ldots, y_0)] \ldots$, soit $m$ le nombre des substitutions; on arrivera à

$$f^m(x, y_0) = (f+1)(x, m; y_0);$$

écrivant N au lieu de $f+1$, nous aurons pour l'itérée Y

$$\text{(A)} \qquad Y = N(x, m; y_0);$$

pour $m = 1$, on retrouvera $f(x, y_0)$; on peut fixer $y_0$, par l'équation

$$f(x, y_0) = x,$$

$y_0$ sera l'initial d'*effet nul;* en inversant l'équation (A), on aura

$$m = (N+1)(b, -1; Y) - (N+1)(b, -1; y_0);$$

la fonction cherchée est donc de la forme

$$\varphi(x) = K[(N+1)(b, -1; x) - (N+1)(b, -1; i)],$$

$i$ étant un initial convenable, K un facteur constant arbitraire. L'équation est donc satisfaite par les fonctions logarithmes-$l$ généralement.

A côté de l'équation d'Abel, il convient de considérer l'équation

$$\text{(II)} \qquad \varphi f(x, y) = \varphi x - \varphi y.$$

On verrait facilement que $f$ doit être un quotient-D, $\varphi$ est encore un logarithme-L et plus généralement un logarithme-$l$.

2. *Fonctions admettant un théorème d'addition donné :*

$$\text{(III)} \qquad \Xi(u+v) = f(\Xi u, \Xi v).$$

Pour que le problème soit possible, il faut que $f$ possède la symétrie abélienne. Posons avec M. Bourlet

$$\Xi u = x, \qquad \Xi v = y,$$

d'où

$$x = \Xi^{-1} u, \qquad y = \Xi^{-1} v.$$

L'équation peut alors s'écrire

$$\Xi^{-1} x + \Xi^{-1} y = \Xi^{-1} f(x, y),$$

et l'on retombe sur l'équation d'Abel. On a vu que, si $f$ est un produit-M, $\Xi^{-1}$ est le logarithme-$l$ de mode N; d'où

$$\Xi^{-1} x = (\mathrm{N}+1)(c, -1; x),$$

et, par suite,

$$\mathrm{N}(u+v) = \mathrm{N}(u; \mathrm{N}v),$$

par conséquent, si $f$ est un produit-M de mode $\mathrm{N}, \Xi$ est la fonction directe de mode N; on peut multiplier par une constante arbitraire les variables elles-mêmes, et l'on a

$$\mathrm{N}[\mathrm{K}(u+v)] = \mathrm{N}[\mathrm{K}u; \mathrm{N}(\mathrm{K}v)].$$

Donc, plus généralement, les puissances-$p$ satisfont à l'équation.

Les puissances-P et les puissances-$p$ satisfont aussi à l'équation

$$\text{(IV)} \qquad \Xi(u-v) = f(\Xi u, \Xi v),$$

où $f$ est le quotient-D de $\Xi u$ par $\Xi v$.

3. *Opérations distributives.* — On peut dire que $\psi$ est distributive par rapport à $f$ si l'on a [1]

$$\text{(V)} \qquad \psi f(x, y) = f(\psi x, \psi y),$$

$\psi x$ et $\psi y$ étant reliés de la même manière dans le second membre que $x$ et $y$ sous le signe $f$, dans le premier. La multiplication est distributive par rapport à l'addition; l'élévation aux puissances, par rapport à la multiplication. Chercher quelle est l'opération $\psi$ distributive par rapport à une opération donnée $f$, c'est résoudre (V) par rapport à $\psi$. Pour que l'équation puisse être résolue, il faut que $f$ soit un produit-M (ou un quotient-D). Posons

$$x = \xi u, \qquad y = \xi v;$$

l'équation devient

$$\psi f(\xi u, \xi v) = f(\psi \xi u, \psi \xi u);$$

[1] Ce terme a été employé par M. S. PINCHERLE dans un sens différent (*Math. Annalen*, B. 49. Sur le Calcul fonctionnel distributif, § 55.)

si $f$ est un produit de mode N, et si l'on choisit pour $\xi$ la fonction directe de mode N, $\xi z = \mathrm{N}(hz)$ ($h$, constante arbitraire), le premier membre se réduira, d'après ce qu'on a vu plus haut, à $\psi\xi(u+v)$ et l'équation devient

$$\psi\xi(u+v) = f(\psi\xi u, \psi\xi v),$$

équation qui sera à son tour satisfaite, d'après le même théorème, si l'on pose

$$\psi\xi z = \mathrm{N}(h'z),$$

$h'$ étant une constante arbitraire; on a donc

$$\psi\mathrm{N}(hz) = \mathrm{N}(h'z);$$

posant

$$\mathrm{N}(hz) = t,$$

d'où

$$hz = \mathrm{N}^{-1}t, \qquad z = \frac{1}{h}\mathrm{N}^{-1}t,$$

on a

$$\psi t = \mathrm{N}\,\frac{h'}{h}\,\mathrm{N}^{-1}t = \mathrm{NKN}^{-1}t,$$

où K est un facteur constant arbitraire.

Si l'on fait $\mathrm{K} = 1$, on trouve $\psi x = x$, solution évidente *a priori;* si K est quelconque, on a une puissance-$p$ de mode N. Ainsi les puissances-$p$ sont distributives par rapport aux produits-M de même mode. Les puissances-P ne jouissent pas, *en général,* de cette propriété.

La notion un peu vague de puissances symboliques (¹) doit, comme on le voit, être remplacée par les notions de puissances-P et de puissances-$p$ qui répondent à des fonctions distinctes en général.

4. Ces fonctions et les logarithmes-$l$ permettent d'exprimer les solutions des équations fonctionnelles précédentes, mais n'indiquent pas les calculs à faire pour obtenir leurs valeurs (c'est d'ailleurs ce qui se présente quand on explicite une inconnue au moyen d'irrationnelles ou de logarithmes) : il est donc nécessaire de donner des expressions limites permettant de les calculer; les puissances-$p$ et les logarithmes-$l$ se ramenant à des puissances-P et aux logarithmes-L, il suffit d'avoir les expressions de ces deux

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 21 février 1898, p. 584.

fonctions; les formules suivantes, auxquelles il est fait allusion à la fin de ma Note précédente et dont je me réserve de déterminer les conditions de validité, répondent à ce but.

Soit $\alpha$ un zéro de $N(x) - x$; $N(x)$ et son inverse sont supposées uniformes, continues et régulières en $\alpha$. On sait qu'il existe, d'après MM. Kœnigs, Grévy et Leau, une région R au voisinage de $\alpha$, telle qu'en prenant $x$ dans son intérieur, l'une au moins des substitutions $x, N(x)$; $x, N^{-1}(x)$ converge vers $\alpha$, à condition de prendre parmi les différentes déterminations de $N^{-1}(x)$ celle qui, pour $x = \alpha$, se réduit à $\alpha$. Supposons de plus $\alpha$ réel, $Nx$ réel pour les valeurs réelles de $x$ voisines de $\alpha$, et $N'\alpha$ positif ou nul. Plaçons l'origine en $\alpha$ et soit $\varphi x$ ce que devient la fonction de substitution et $\varphi^{-1}x$ son inverse. Les expressions suivantes fournissent *une* itérée que nous désignerons par $\psi(u, x)$.

*Premier cas.* — $0 < \varphi'(0) < 1$

$$\psi(u,x) = \lim \varphi \left\{ [\varphi^{-m}{}'(0)]^u \varphi^m x \right\}.$$

*Deuxième cas.* — $\varphi'(0) = 1$ et, plus généralement, les $p - 1$ premières dérivées de $\varphi x - x$ sont nulles pour $x = 0$

$$\psi(u, x) = \lim \varphi^{-m} \left\{ \left[ 1 - \frac{u}{m(p-1)} \right] \varphi^m x \right\}.$$

*Troisième cas.* — $\varphi'(0) = 0$ et, plus généralement, les $p - 1$ premières dérivées de $\varphi x$ sont nulles pour $x = 0$. Posons

$$\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} = P$$

et supposons P positif dans le cas où $p$ est impair. On a

$$\psi(u, x) = \lim \varphi^{-m} \left[ P^{\frac{p^u - 1}{p-1}} (\varphi^m x)^{p^u} \right].$$

Dans ces expressions $m$ est un entier positif qu'on fait croître au delà de toute limite. Si $x$ est pris dans la région R, elles représentent une fonction analytique des variables $x$ et $u$ et pouvant être réelle quand $u$ et $x$ seront réelles; elles s'appliquent s'il y a convergence par la substitution directe; dans le cas contraire, on changerait le signe de $m$. L'inversion de ces formules donnerait les expressions correspondantes des logarithmes-L; dans le premier cas, par exemple, posons $\psi(u, x) = X$, on aura l'expression du logarithme-L

$$\frac{1}{\log \varphi'_0} \log \frac{\varphi^m X}{\varphi^m x},$$

X et $x$ et doivent être pris dans la région R. On possède déjà, du reste, des formules d'itération. M. Kœnigs a donné la solution dans le cas $|\varphi'(0)| < 1$; notre formule, pour ce cas, peut se tirer immédiatement de la sienne. Dans le même cas, M. Bourlet (1) a appliqué la formule d'interpolation de Newton. Quant au cas $|\varphi'(0)| = 1$, M. Leau (2) exprime non la fonction itérée, mais sa dérivée, par un produit infini.

5. Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, soit

$$f(x, y) = \frac{C^2(x+y) + 2Cxy}{C^2 - xy};$$

dans ce cas le calcul peut s'achever au moyen des symboles usuels. On vérifie que $f(x, y)$ possède la symétrie abélienne.

La puissance-$p$ $m^{\text{ième}}$ est

$$\frac{C^2(mx+y) + C(m+1)xy}{C[C-(m-1)x] - mxy}.$$

Déterminons la valeur de $y$ qui soit d'effet nul; il suffit de résoudre, par rapport à $y_0$, l'équation $f(x, y_0) = x$; on trouve $y_0 = 0$; donc 0 est l'initial d'effet nul, et nous aurons la puissance-$p$ $m^{\text{ième}}$ particulière

$$\text{(B)} \qquad Y = \frac{Cmx}{C-(m-1)x}$$

que l'on peut écrire

$$\text{(B')} \qquad Y = \frac{rm}{s-m}.$$

Pour avoir la fonction inverse cherchée, itérons (B') par rap-

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1898.

(2) *Thèse*. — Je pense montrer plus tard que la fonction définie par la formule donnée plus haut coïncide avec l'itérée de M. Leau.

port à $m$; ce qui donne

$$\text{(C)} \qquad Y = \frac{r^t m}{s^t - \dfrac{r^t - s^t}{r - s} m}$$

où $t$ est l'indice d'itération.

Pour tirer $m$ en fonction de Y dans (B) faisons, dans (C), $t = -1$, permutons Y et $m$ et remplaçons $r$ et $s$ par leurs valeurs; il reste une relation de la forme

$$m = K \frac{Y}{C + Y},$$

ainsi qu'on aurait pu le tirer de (B) dans ce cas particulier.

La fonction cherchée $\varphi$ est donc de la forme $K \dfrac{x}{C + x}$. On vérifie facilement que l'on a :

Équation (I) $\qquad \dfrac{x}{C + x} + \dfrac{y}{C + y} = \dfrac{f(x, y)}{C + f(x, y)},$

Équation (III) $\qquad \dfrac{C(u + v)}{1 - (u + v)} = f\left(\dfrac{Cu}{1 - u}, \dfrac{Cv}{1 - v}\right),$

Équation (V)

$$\frac{C m f(x, y)}{C - (m - 1) f(x, y)} = f\left[\frac{C m x}{C - (m - 1) x}, \frac{C m y}{C - (m - 1) y}\right].$$

En terminant, une remarque est nécessaire : nous avons parlé d'algorithmes d'une même série; or une fonction n'a pas seulement une itérée, mais bien une infinité d'itérées. Celles qui appartiennent à un même point-limite diffèrent, comme l'on sait, par l'introduction d'une fonction périodique arbitraire ayant l'unité pour période; si l'on considère seulement celles qui sont définies par les formules données plus haut, il pourra en *exister* autant qu'il y aura de régions distinctes pour lesquelles ces mêmes formules définissent une fonction analytique. Un algorithme sera caractérisé non par l'initial, mais par la région où est choisi l'initial et dans laquelle ce dernier peut prendre toutes les valeurs possibles.

---