COMBEBIAC.

Sur l'application du calcul des biquaternions à la géométrie plane

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 259-263
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__259_1>

SUR L'APPLICATION DU CALCUL DES BIQUATERNIONS A LA GÉOMÉTRIE PLANE;

Par M. Combebiac.

I.

On sait qu'un biquarternion est une quantité numérique complexe à huit unités indépendantes, dont quatre sont les unités quaternioniennes : 1, i, j, k et dont les quatre autres sont les produits des quatre premières par une unité ω commutative avec toutes les autres et satisfaisant à la relation

$$\omega^2 = 1.$$

Un biquaternion est donc de la forme

$$q + \omega q,$$

où q et q' sont des quaternions.

Les unités 1, k, ωi et ωj déterminent un système numérique à quatre unités, dont les règles de multiplication représentent la composition des mouvements sans déformation dans le plan.

Nous représenterons un de ces mouvements par le nombre complexe

$$w + kx_0 + \omega i x_1 + \omega j x_2,$$

où w, x_0, x_1, x_2 sont des paramètres homogènes du mouvement qui, comme on le sait, est une rotation.

Les coordonnées du centre sont

$$\frac{x_1}{x_0}, \quad \frac{x_2}{x_0}.$$

L'angle de la rotation 2δ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{x_0}{w}.$$

Un point sera naturellement représenté par la rotation d'un angle π autour de ce point.

Si μ est un point de masse 1, une rotation autour de ce point d'un angle 2δ sera représentée par l'expression

$$r \equiv w + \mu x \equiv \mathrm{T}r(\cos \mathrm{S} + \sin \mathrm{S}),$$

où l'on a posé $\mathrm{T}r = \sqrt{w^2 + x^2}$.

Nous poserons aussi

$$\mathrm{S}r = w, \qquad \mathrm{P}r = \mu x.$$

Si l'on pose

$$k = \mu, \qquad \omega i = \varepsilon_1, \qquad \omega j = \varepsilon_2,$$

les règles du calcul en question sont les suivantes :

$$\mu^2 = -1, \qquad \varepsilon_1^2 = 0, \qquad \varepsilon_2^2 = 0,$$

$$\mu\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \qquad \mu\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_2 = -\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0.$$

Ce calcul permet de traiter facilement un grand nombre de questions géométriques. Il comprend le calcul des équipollences. Ce n'est pas le lieu de le développer dans ses détails.

II.

M. Study [1] a remarqué que le calcul des biquaternions permet la composition non seulement des mouvements sans déformation, mais encore des symétries entre elles et avec les mouvements.

Pour cela, il suffit de représenter par

$$\alpha_0 \omega k + \alpha_1 i + \alpha_2 j$$

la symétrie par rapport à la droite qui a pour équation

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0.$$

Ainsi i représente l'axe des y, j représente l'axe des x changé de signe, ωk représente la droite de l'infini. Nous poserons

$$\omega k = \delta_0, \qquad i = \delta_2, \qquad j = -\delta_1.$$

Un biquaternion pourra donc, dans cet ordre d'idées, se mettre sous la forme

$$r \equiv w + m + \omega u + d,$$

m représentant un point; d, une droite; w et u, des quantités numériques vulgaires.

L'expression $\omega u + d$ représente la symétrie par rapport à la droite d accompagnée d'une translation suivant cette même droite. La longueur de la translation est

$$\frac{u}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Un biquaternion ne peut se mettre sous la forme précédente que d'une seule manière; car chaque terme ne contient que des unités qui n'entrent pas dans les autres.

De plus, ces termes sont indépendants du système de référence, ou, ce qui est la même chose, sont des covariants de r par rapport au groupe des mouvements sans déformation, c'est-à-dire

(1) Study, *Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen* (*Mathematische Annalen*, B. 39; 1891).

par rapport à l'opération

$$(\varpi + \mu x)(\quad.\quad)(\varpi + \mu x)^{-1}$$
$$\equiv \frac{1}{\varpi^2 + x^2}(\varpi + \mu x)(\quad.\quad)(\varpi - \mu x).$$

En effet, cette opération transforme un point en un point, une droite en une droite et laisse l'expression $\varpi + \omega u$ invariante.

Nous poserons donc

$$\mathrm{S}\,r = \varpi, \qquad \mathrm{P}\,r = m, \qquad \Omega\,r = u, \qquad \mathrm{D}\,r = d.$$

Nous poserons de plus

$$\mathrm{T}\,r = \sqrt{\varpi^2 + x^2 + u^2 + \alpha^2},$$

où x est la masse de m, et α la longueur de d. $\mathrm{T}r$ sera dit le *tenseur* de r.

III.

Les quatre fonctions linéaires S, P, Ω, D permettent de traiter un très grand nombre de questions géométriques.

Certaines propriétés fondamentales sont à retenir.

Les points pour lesquels on a $\mathrm{T}m = 0$ sont des points de l'infini, autrement dit *des vecteurs*. Ils sont de la forme

$$\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2.$$

La différence de deux points de même tenseur (ou masse) est un vecteur.

Si μ et μ' sont des points unitaires (de tenseur *un*) le produit $\mu\mu'$ représente la translation suivant la direction du vecteur $\mu' - \mu$, mais d'une longueur double de $\mu' - \mu$. $\mathrm{P}\mu\mu'$ représente le vecteur perpendiculaire à $\mu' - \mu$ et d'une longueur égale.

Si δ et δ' sont deux droites unitaires faisant entre elles un angle θ et se coupant au point μ, on a

$$\cos\theta = -\mathrm{S}\delta\delta', \qquad \mu\sin\theta = \mathrm{P}\delta\delta'.$$

La condition de perpendicularité sera donc

$$\mathrm{S}\delta\delta' = 0;$$

celle de parallélisme

$$\mathrm{P}\delta\delta' = 0.$$

La distance du point μ à la droite δ sera exprimée par $\Omega\mu\delta$, de sorte que l'équation de la droite δ s'écrira

$$\Omega \mu \delta = 0.$$

Le point à l'infini de la droite δ, c'est-à-dire le vecteur qui indique la direction de cette droite, est représenté par $\delta_0 \delta$.

Donnons quelques formules utiles :

(I)	$\mathrm{S}mm' = -\mathrm{T}mm'$,	$\mathrm{P}mm' = -\mathrm{P}m'm$,	$\mathrm{D}mm' = 0$,	$\Omega mm' = 0$,
(II)	$\mathrm{S}md = 0$,	$\mathrm{P}md = 0$,	$\mathrm{D}md = -\mathrm{D}dm$,	$\Omega md = \Omega dm$,
(III)	$\mathrm{S}dd' = \mathrm{S}d'd$,	$\mathrm{P}dd' = -\mathrm{P}d'd$,	$\mathrm{D}dd' = 0$,	$\Omega dd' = 0$,

ω commutatif avec tout biquaternion, $\delta_0 m = -\mathrm{T}m.\omega$.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{IV}) && \Omega dd'd'' && = \Omega(\mathrm{P}dd'.d'') = \Omega d''dd' \\
&&&&& = -\Omega(\mathrm{P}d'd.d'') = -\Omega(d'dd''), \\
&(\mathrm{V}) && d\Omega d_1 d_2 d_3 && = d_1 \Omega dd_2 d_3 + d_2 \Omega d_1 dd_3 + d_3 \Omega d_1 d_2 d, \\
&(\mathrm{VI}) && \mathrm{D}(d\mathrm{P}d'd'') && = d''\mathrm{S}dd' - d'\mathrm{S}dd'', \\
&(\mathrm{VII}) && 2\mathrm{D}(d\mathrm{P}d'd'') && = \mathrm{D}dd'd'' - \mathrm{D}dd''d', \\
&(\mathrm{VIII}) && \mathrm{D}dd'd'' && = d\mathrm{S}d'd'' - d'\mathrm{S}d''d + d''\mathrm{S}dd';
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{D}dd'd'' = \mathrm{D}d''d'd.$$