

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

**Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les
géodésiques des surfaces réglées du second ordre**

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 195-216

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__195_0

© Bulletin de la S. M. F., 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA FORME DES LIGNES GÉODÉSIQUES A L'INFINI
ET SUR LES GÉODÉSIQUES DES SURFACES RÉGLÉES DU SECOND ORDRE**

Par M. HADAMARD.

Dans un précédent Travail ⁽¹⁾ j'ai montré que, sur une surface à courbures opposées, toute nappe infinie évasée ⁽²⁾ peut être considérée comme limitée par une géodésique fermée, qu'on peut appeler la *ligne de gorge* de cette nappe, et telle que toute géodésique qui traverse cette ligne pour entrer dans la nappe s'éloigne ensuite constamment et indéfiniment sur celle-ci.

Ne peut-on rien dire de général sur la forme des géodésiques qui s'éloignent ainsi à l'infini?

L'étude du parabolöide hyperbolique, et surtout celle de l'hyperboloïde réglé, vont nous donner à cet égard quelques renseignements, en même temps qu'elles nous fourniront certaines vérifications intéressantes des théorèmes généraux.

*

Hyperboloïde. — Soit l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \quad (A > 0, B > 0, C < 0);$$

on sait que la théorie des surfaces homofocales permet de représenter les coordonnées d'un point de cette surface par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{A(A + \lambda)(A + \mu)}{(A - B)(A - C)}, \\ y^2 = \frac{B(B + \lambda)(B + \mu)}{(B - C)(B - A)}, \\ z^2 = \frac{C(C + \lambda)(C + \mu)}{(C - A)(C - B)}, \end{cases}$$

et que, dans ces conditions, l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = \frac{\lambda - \mu}{4} \left[\frac{\lambda d\lambda^2}{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)} - \frac{\mu d\mu^2}{(A + \mu)(B + \mu)(C + \mu)} \right]$$

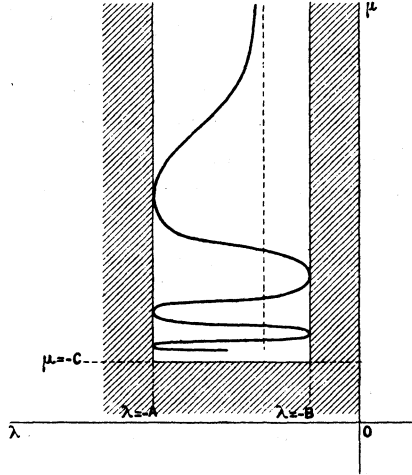
λ varie entre $-A$ et $-B$, μ entre $-C$ et $+\infty$; de sorte que

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV, p. 1503.

⁽²⁾ Voir, pour le sens de ce mot, la Note citée.

la surface est représentée, sur le plan des $\lambda\mu$, par la région délimitée sur la *fig. 1*. Cette région doit être considérée comme la superposition de huit feuillets qui se distinguent les uns des autres par les signes des coordonnées x, y, z ; la traversée de la

Fig. 1.



ligne $\mu = -C$ (ellipse de gorge) correspondant au changement de signe de z , pendant que les traversées des lignes $\lambda = -A$, $\lambda = -B$ (hyperboles principales) correspondent respectivement au changement de signe de x et au changement de signe de y .

En vertu de la forme de l'élément linéaire, l'équation des lignes géodésiques est

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}} \\ & = \int d\mu \sqrt{\frac{d\mu}{(\mu - k)(A + \mu)(B + \mu)(C + \mu)}} \end{aligned} \right.$$

(les deux constantes arbitraires étant k et la constante additive l due aux quadratures); ou, sous forme différentielle

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} & d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}} \\ & = d\mu \sqrt{\frac{\mu}{(\mu - k)(A + \mu)(B + \mu)(C + \mu)}} = dt, \end{aligned} \right.$$

t désignant une variable auxiliaire.

La quantité k doit être comprise entre λ et μ , pour que le rapport $\frac{d\lambda}{d\mu}$ soit réel. Si, par conséquent, nous envisageons d'abord le paramètre μ , nous voyons que cette quantité peut varier depuis la plus grande des quantités $-C$, k jusqu'à $+\infty$.

Si μ est croissant à un moment quelconque, il croît, dans toute la suite, constamment et indéfiniment. Si, au contraire, μ est initialement décroissant, il décroît jusqu'à ce qu'il ait atteint sa limite inférieure, ce qui arrive, si $k \neq -C$, lorsque t a varié d'une certaine quantité finie. μ redevient alors croissant et augmente indéfiniment.

Si la limite inférieure est $-C$, la géodésique traverse l'ellipse de gorge et passe de l'une à l'autre des deux moitiés (nappes infinies) que cette ellipse détermine sur la surface.

Si la limite inférieure est k , il n'y a pas changement de feuillet lorsque μ atteint cette limite. La géodésique ne traverse pas le cercle de gorge; elle vient de l'infini et y retourne sur la même nappe.

Nous trouvons bien là les deux catégories *générales* de géodésiques prévues par la théorie des surfaces à courbures opposées et obtenues par Halphen ⁽¹⁾ pour le cas de l'hyperboloïde de révolution.

Si enfin $k = -C$ et que μ soit initialement décroissant, il sera décroissant pour toute valeur de t et tendra vers $-C$ pour $t = \infty$.

Quant à λ , il est clair qu'il oscillera entre les deux valeurs $-A$ et $-B$ si $k > -B$; à chaque oscillation simple, t variera d'une même quantité, fonction de k , à savoir

$$(3) \quad \int_{-A}^{-B} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}}.$$

Nous pourrions, pour abréger, représenter cette expression par le symbole $[-A, -B]$, en désignant, d'une manière générale, par $[\lambda_1, \lambda_2]$ l'intégrale analogue à (3) étendue entre les limites λ_1, λ_2 et prise en valeur absolue.

Les contacts avec les lignes $\lambda = -A, \lambda = -B$ correspondront respectivement, dans l'espace, à des changements de signe de x et de y , de sorte qu'il n'y a retour au feuillet primitif qu'au

⁽¹⁾ *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, Chap. VI.

bout de deux oscillations doubles, ce système de deux oscillations doubles donnant une circulation autour de l'hyperboloïde.

Combinons ce que nous venons de trouver relativement à la variation de λ avec ce qui a été précédemment obtenu pour μ , en prenant d'abord le cas de $k = -C$ (*fig. 1*). Comme, dans ce cas, t augmente indéfiniment lorsque μ tend vers $-C$, λ effectuera une infinité d'oscillations; autrement dit, la géodésique s'approchera indéfiniment de l'ellipse de gorge en s'enroulant indéfiniment autour d'elle; c'est une *asymptote à l'ellipse de gorge*, dernière catégorie de géodésiques prévue par la théorie et obtenue par Halphen sur l'hyperboloïde de révolution.

Considérons au contraire, k étant quelconque, ce qui se passe lorsque μ augmente indéfiniment. Dans ces conditions, nous avons vu que t reste fini. Donc λ n'effectue qu'un nombre limité d'oscillations et tend finalement vers une valeur limite λ_0 ; en d'autres termes, la ligne figurative de la géodésique sur le plan de $\lambda\mu$ a une *asymptote verticale*.

Si, pour fixer les idées, nous supposons le point (λ_1, μ_1) pris assez loin sur la géodésique pour que λ et μ n'atteignent plus leurs valeurs extrêmes entre ce point et l'infini, la quantité λ_0 sera déterminée par la condition

$$(4) \quad [\lambda_0, \lambda_1] = [\mu_1, \infty],$$

λ_0 est ainsi exprimé en fonction des deux constantes arbitraires k et l (car il est à noter que la constante l figure effectivement dans la relation précédente).

Nous avons supposé $k > -B$; dans le cas contraire (¹), la limite supérieure de λ serait k et il semblerait au premier abord que λ puisse osciller un nombre quelconque de fois entre cette limite supérieure et la limite inférieure $-A$.

La théorie générale montre immédiatement qu'il n'en est rien et que la géodésique ne peut rencontrer deux fois la ligne $\lambda = -A$; car (en l'absence de toute rencontre intermédiaire avec $\lambda = -B$) l'arc de géodésique compris entre les deux intersections en question formerait avec l'arc de l'hyperbole principale terminé aux mêmes extrémités un biangle géodésique réductible, ce qui ne se peut.

(¹) L'hypothèse $k = -B$ n'offre aucune particularité importante.

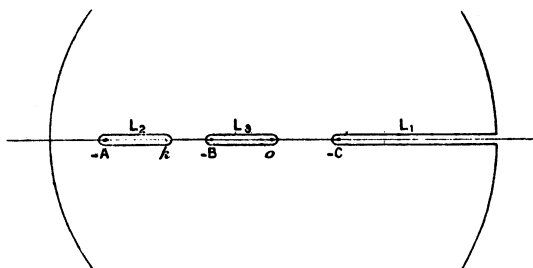
D'où provient ici cette impossibilité? Comme la variation totale de t , lorsque l'on suit la géodésique sur son parcours indéfini dans les deux sens, est égale à $2[-C, \infty]$, l'oscillation double sera impossible si l'on a l'inégalité

$$2[-A, k] > 2[-C, \infty].$$

Il est remarquable que la démonstration de cette inégalité et d'autres analogues que nous trouverons plus loin puisse se faire par la même méthode que j'ai employée ailleurs ⁽¹⁾ à propos du mouvement du corps grave de révolution, et qui consiste à employer la théorie des fonctions de variables complexes.

Nous considérerons, dans le plan de la variable complexe λ : 1° un lacet L_1 (*fig. 2*) partant de $\lambda = +\infty$ et y revenant après

Fig. 2.



circulation autour du point $\lambda = C$, ce lacet étant parcouru dans le sens positif sur sa branche supérieure; 2° un lacet L_2 entourant les points $\lambda = -A$, $\lambda = k$; 3° un lacet L_3 entourant les points $\lambda = -B$, $\lambda = 0$, ces lacets étant, comme le premier, suivis en sens positif sur leurs branches supérieures.

La fonction $\sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}}$ sera holomorphe dans l'aire comprise entre ces trois lacets et un cercle de rayon très grand; si elle est positive sur la branche supérieure de L_1 , elle sera négative sur la branche supérieure de L_2 (l'argument de la quantité sous le radical variant de -2π lorsqu'on passe de l'une à l'autre en restant dans la moitié supérieure du plan) et positive sur la branche supérieure de L_3 . Comme l'intégrale le

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XIX; octobre 1895.

long du grand cercle est infiniment petite, le théorème de Cauchy donne

$$2[-C, \infty] - 2[-A, k] + 2[-B, 0] = 0,$$

par conséquent le résultat demandé.

Examinons maintenant quelle sera, dans l'espace, l'allure de la géodésique à l'infini. Pour cela, nous partirons de l'équation en λ, μ , qui n'est autre que l'équation (4) où λ_1 et μ_1 sont remplacés par λ et μ : nous développerons le premier membre suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$, et le second suivant les puissances de $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, soit

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda_0) \sqrt{\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - k)(A + \lambda_0)(B + \lambda_0)(C + \lambda_0)}} + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(2 + \frac{k - A - B - C}{3\mu} + \dots \right). \end{aligned}$$

Substituant dans les équations (1), il vient

$$(5) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{A}{(A-B)(A-C)}} \left[\sqrt{A + \lambda_0} \sqrt{\mu} + \sqrt{\frac{(\lambda_0 - k)(B + \lambda_0)(C + \lambda_0)}{\lambda_0}} + \dots \right], \\ y = \sqrt{\frac{-B}{(B-C)(B-A)}} \left[\sqrt{-(B + \lambda_0)} \sqrt{\mu} + \sqrt{\frac{-(\lambda_0 - k)(C + \lambda_0)(A + \lambda_0)}{\lambda_0}} + \dots \right], \\ z = \sqrt{\frac{-C}{(C-A)(C-B)}} \left[\sqrt{-(C + \lambda_0)} \sqrt{\mu} + \sqrt{\frac{-(\lambda_0 - k)(A + \lambda_0)(B + \lambda_0)}{\lambda_0}} + \dots \right], \end{cases}$$

les termes non écrits étant infiniment petits.

Donc, la géodésique est asymptote à une droite; et nous noterons que la position de celle-ci dépend à la fois de λ_0 et de k .

Paraboloidé. — Les choses se passent d'une façon assez analogue sur le paraboloidé hyperbolique dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 2z = 0 \quad (A > 0, B < 0)$$

et la représentation en coordonnées elliptiques

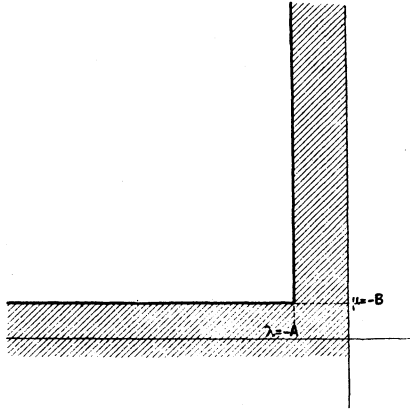
$$(6) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{A(A + \lambda)(A + \mu)}{B - A}, \\ y^2 = \frac{B(B + \lambda)(B + \mu)}{A - B}, \\ 2z = \lambda + \mu + A + B. \end{cases}$$

La surface est représentée sur le plan des $\lambda\mu$ par quatre feuillets recouvrant l'angle droit

$$\lambda < -A, \quad \mu > -B$$

(fig. 3) et se raccordant entre eux suivant ses côtés. Sur la surface, ces feuillets correspondent à quatre secteurs disposés autour

Fig. 3.



du sommet, de sorte que chacun d'eux est adjacent à deux autres et opposé à celui qui reste.

L'élément linéaire étant

$$ds^2 = \frac{\lambda - \mu}{4} \left[\frac{\lambda d\lambda^2}{(A + \lambda)(B + \lambda)} - \frac{\mu d\mu^2}{(A + \mu)(B + \mu)} \right],$$

une géodésique quelconque est représentée par l'équation

$$(7) \quad \int d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)}} = \int d\mu \sqrt{\frac{\mu}{(\mu - k)(A + \mu)(B + \mu)}},$$

les deux constantes arbitraires étant, comme précédemment, k et la constante l des quadratures. Nous désignerons par (λ_1, λ_2)

l'intégrale $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)}}$, prise en valeur absolue.

La formule (7) montre que k est compris entre λ et μ , et que l'une quelconque des quantités λ, μ , si elle a commencé à croître en valeur absolue, continue à varier dans le même sens; mais que, si elle est initialement décroissante en valeur absolue,

elle atteint une certaine valeur limite à partir de laquelle son module redevient croissant.

En un mot, chacun des paramètres λ et μ part de l'infini (négatif pour λ , positif pour μ) et y retourne ⁽¹⁾ après avoir passé par un certain module minimum (k ou $-A$ pour λ , k ou $-B$ pour μ). De ces minima de $|\lambda|$ et de μ , l'un au moins correspond à un changement de feuillets; les deux, si k est compris entre $-A$ et $-B$.

L'intégrale (λ_1, λ) est infinie avec $|\lambda|$: pour étudier l'allure de la géodésique à l'infini, nous écrirons la formule (7) sous la forme

$$\log\left(\frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) + \int_{\lambda_1}^{\lambda} -d\lambda \left[\frac{1}{\lambda} + \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda-k)(A+\lambda)(B+\lambda)}} \right] \\ - \int_{\mu_1}^{\mu} d\mu \left[\sqrt{\frac{\mu}{(\mu-k)(A+\mu)(B+\mu)}} - \frac{1}{\mu} \right] = 0$$

(les radicaux étant pris positivement): nous constatons alors que $\frac{\lambda}{\mu}$ tend vers une limite q donnée par l'équation

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\log\left(q \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) + \int_{\lambda_1}^{-\infty} -d\lambda \left[\frac{1}{\lambda} + \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda-k)(A+\lambda)(B+\lambda)}} \right] \\ &- \int_{\mu_1}^{+\infty} d\mu \left[\sqrt{\frac{\mu}{(\mu-k)(A+\mu)(B+\mu)}} - \frac{1}{\mu} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais nous pouvons développer les deux membres de l'équation (7) suivant les puissances de $-\frac{1}{\lambda}$ et de $\frac{1}{\mu}$ respectivement, puis intégrer: la relation précédente donne la valeur de la constante d'intégration et il vient

$$\log(-\lambda) + \frac{A+B-k}{2\lambda} + \dots = \log(-q) + \log \mu + \frac{A+B-k}{2\mu} + \dots,$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres

$$\lambda + \frac{A+B-k}{2} + \dots = -q \left(\mu + \frac{A+B-k}{2} + \dots \right),$$

les termes non écrits étant infiniment petits.

⁽¹⁾ Il y a exception pour $k = -A$ ou $k = -B$ (asymptotisme aux paraboles principales).

Donc, la ligne figurative de la géodésique a une asymptote. *La géodésique elle-même a également une asymptote dans l'espace* : car, en substituant dans les formules (6) la valeur trouvée pour λ en fonction de μ , il vient

$$(8') \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{-qA}{B-A}} \left[\mu + \frac{A\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{A+B-k}{2}\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{2} + \dots \right], \\ y = \pm \sqrt{\frac{-qB}{A-B}} \left[\mu + \frac{B\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{A+B-k}{2}\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{2} + \dots \right], \\ 2z = \mu(1 - q) + A + B - \frac{A+B-k}{2}(1 + q) + \dots \end{cases}$$

*

Nous avons, maintenant, à nous demander ce qui, dans le cas général, correspond aux résultats obtenus (relativement à la forme des géodésiques) sur les nappes infinies de l'hyperboloïde.

On peut remarquer, à cet effet, que, lorsque le point mobile s'éloigne à l'infini sur la géodésique dans une direction déterminée, la représentation sphérique tend vers une position limite déterminée; et c'est ce fait qu'on peut chercher à généraliser.

Seulement, la question ainsi posée ne dépend pas seulement de l'élément linéaire; sa résolution exigerait que l'on ait déterminé la surface elle-même; et elle n'aurait aucun sens pour les problèmes de Dynamique à deux degrés de liberté, autres que le mouvement d'un point sur une surface.

Aussi la laisserons-nous de côté et considérerons-nous la généralisation cherchée sous le point de vue suivant :

Représentons les points de la nappe infinie par leur distance u (comptée suivant la géodésique normale) à la ligne de gorge et l'arc v de cette ligne, comptée depuis une origine fixe jusqu'au pied de cette distance. Je dis que *lorsqu'un point s'éloignera indéfiniment sur une géodésique, v tendra vers une limite*.

Pour le prouver, considérons l'équation différentielle des géodésiques

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \xi \left[1 - \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right],$$

où

$$\xi = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u}$$

($du^2 + C^2 dv^2$ étant l'élément linéaire).

Si la courbure est négative, la quantité $\frac{1}{\xi}$ est décroissante lorsque u croît et l'on a, par conséquent,

$$\xi > \frac{1}{u+h},$$

h étant une certaine constante; moyennant quoi, l'équation différentielle montre que l'on a

$$-d \log \left[1 - \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right] > \frac{2 du}{u+h},$$

et, par suite, que la quantité

$$\left[1 - \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right] (u+h)^2 = \left[C \frac{dv}{ds} (u+h) \right]^2$$

est toujours décroissante lorsque l'on s'éloigne sur la géodésique. k désignant la valeur de l'expression $C \frac{dv}{ds} (u+h)$ au point (u_0, v_0) de la courbe, il vient

$$v - v_0 < k \int_{u_0}^u \frac{1}{C(u+h)} \frac{ds}{du} du.$$

Or le rapport $\frac{ds}{du}$ tend vers l'unité et quant à C , il est égal à u multiplié par une quantité non infiniment petite (à cause de $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} > 0$).

Donc, l'intégrale du second membre est finie pour $u = \infty$: ce qu'il fallait démontrer.

*

Considérons une géodésique L qui ne sort et n'est sortie à aucun moment de la nappe infinie, de manière que u ait un certain minimum au point (u_0, v_0) . Nous venons de voir que la variation totale de v , lorsqu'on s'éloigne (dans un sens déterminé quelconque) depuis ce point (u_0, v_0) jusqu'à l'infini, a une valeur parfaitement déterminée.

On peut d'ailleurs considérer L comme définie lorsqu'on donne u_0 et v_0 .

Supposons que, sans changer v_0 , on augmente u_0 , de manière à substituer à L une nouvelle géodésique L' . La variation totale de v a diminué par ce changement.

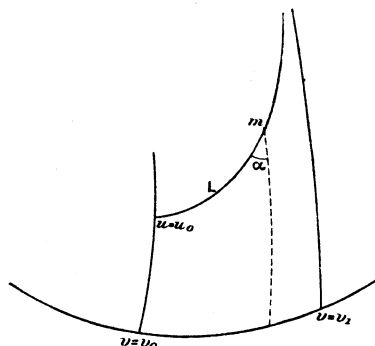
En effet, les valeurs de u , correspondant à une même valeur

de ν sur L et sur L' ne sont jamais égales : sans quoi le point d'intersection ainsi obtenu serait sommet d'un triangle, formé par L , L' et la géodésique $\nu = \nu_0$, triangle qui serait réductible et birectangle : ce qui ne se peut. Donc, la valeur relative à L' est plus grande que la valeur relative à L , et, par conséquent, u devient infini sur L' avant de le devenir sur L .

Que devient cette variation totale de ν lorsque u_0 augmente indéfiniment? Tend-elle vers zéro ou vers une limite non nulle? La considération de la courbure totale va nous permettre de répondre à cette question.

Considérons, en effet, la géodésique menée, normalement à la ligne de gorge, par un point quelconque $m(u, \nu)$ de L . L'angle α que fait cette géodésique avec L tend vers zéro, puisque son cosinus est $\frac{du}{ds}$. Or la différence $\frac{\pi}{2} - \alpha$ n'est autre que la courbure (prise en valeur absolue) du quadrilatère compris entre L , la ligne

Fig. 4.



de gorge et les deux géodésiques normales (celle que nous venons de mener et la géodésique $\nu = \nu_0$ (fig. 4), puisque ce quadrilatère a trois angles droits.

Donc la valeur finale de ν correspondra à une géodésique $\nu = \nu_1$ (fig. 4) telle que la courbure totale de la région comprise entre la ligne $\nu = \nu_1 - \epsilon$, la ligne $\nu = \nu_0$, la ligne de gorge et la ligne L tende vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque ϵ tend vers zéro.

Cela posé, deux cas principaux peuvent se présenter.

En premier lieu, la courbure totale de la nappe infinie peut

avoir une valeur finie : il en sera alors de même pour la courbure de la bande comprise entre la ligne de gorge et les lignes $\nu = \nu_0$, $\nu = \nu_1$: cette dernière courbure sera manifestement de la forme $f(\nu_1) - f(\nu_0)$.

La fonction $f(\nu)$ sera constamment croissante : il n'est pas démontré qu'elle sera continue, mais les expressions $f(\nu + 0)$, $f(\nu - 0)$ auront évidemment un sens. Lorsque ν augmentera de la longueur l de la ligne de gorge, $f(\nu)$ augmentera de la quantité K , qui est la courbure totale de la nappe infinie, prise en valeur absolue.

Dès lors, il résulte de ce qui précède que, sur la géodésique L considérée tout à l'heure, la variation totale de ν (depuis $u = u_0$ jusqu'à $u = \infty$) tendra, lorsque u_0 augmentera indéfiniment, vers la limite $\nu_1 - \nu_0$, ν_1 étant donné par l'équation

$$[f(\nu_1)] - f(\nu_0) = \frac{\pi}{2},$$

où $[f(\nu_1)]$ désigne une quantité comprise entre $f(\nu_1 + 0)$ et $f(\nu_1 - 0)$.

On remarquera que, si K est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, L devra tourner autour de la nappe infinie une ou plusieurs fois, et un grand nombre de fois si K est petit par rapport à $\frac{\pi}{2}$; cela, si grand que soit u_0 .

Supposons, au contraire, que la nappe infinie ait une courbure infinie. Alors il est naturel d'admettre que la bande comprise entre deux géodésiques normales à la ligne de gorge a également une courbure infinie.

Les remarques présentées précédemment montrent alors que la variation totale de ν est nulle pour $u_0 = \infty$.

Il ne reste, comme cas intermédiaire, que celui où la nappe serait divisée, par certaines géodésiques normales à la ligne de gorge, en bandes dont les unes seraient à courbure finie et les autres à courbure infinie. Il est clair que ce cas n'offre aucune difficulté essentielle : la variation de ν tendra vers une limite nulle si la ligne $\nu = \nu_0$ fait partie d'une bande de courbure infinie, et, en général, vers une limite différente de zéro si la ligne $\nu = \nu_0$ fait partie d'une bande de courbure finie.

Sur l'hyperboloïde, chaque nappe a une courbure manifestement comprise entre 0 et 2π . Si l'hyperboloïde est très voisin d'un cylindre, cette courbure étant très petite, on voit que toute géodésique qui ne traverse pas l'ellipse de gorge doit tourner un grand nombre de fois autour de l'hyperboloïde.

En tout cas, la portion de surface comprise entre l'ellipse de gorge et deux branches d'hyperboles principales différentes (autrement dit le huitième de la surface entière) a une courbure inférieure à $\frac{\pi}{2}$; donc, toute géodésique qui ne traverse pas l'ellipse de gorge doit, si on la suit depuis son point le plus rapproché de l'ellipse de gorge jusqu'à l'infini, couper au moins une des hyperboles principales, et, si on la suit depuis l'infini jusqu'à l'infini, couper les deux hyperboles principales, l'une d'elles deux fois.

Ici encore on peut vérifier le résultat directement par des considérations d'intégrales imaginaires. Il s'agit, en effet, de démontrer que, pour $k > -C$ la variable μ ne peut venir de ∞ à k et retourner à ∞ sans que λ effectue au moins deux oscillations entre $-A$ et $-B$; autrement dit, de vérifier l'inégalité

$$2(k, \infty) > 2(-A, -B).$$

Or on a, par une voie toute semblable à celle qui a été suivie précédemment, la relation

$$(9) \quad 2(k, \infty) = 2(-A, -B) + 2(0, -C).$$

Ajoutons que des résultats analogues aux précédents pourraient être énoncés sur les surfaces à connexion simple, comme le paraboloid hyperbolique, en considérant des coordonnées polaires géodésiques u, v rapportées à un point O de la surface. Si la courbure de la surface ne tend pas vers zéro à l'infini (exemple : plan non euclidien), l'angle formé par les asymptotes menées du point O à une géodésique très éloignée tend vers zéro. Si, au contraire, la courbure totale de la surface est finie (paraboloid hyperbolique), l'angle limite α est donné par la condition

$$\alpha + K = \pi,$$

— K étant la courbure de la région indéfinie comprise dans cet angle.

*

Je me propose enfin de vérifier, sur les quadriques réglées,

quelques-uns des théorèmes fondamentaux relatifs aux surfaces à courbure négative, en étudiant les géodésiques qui joignent deux points donnés.

Il y a lieu, ici, de commencer par le paraboloïde hyperbolique, qui est à connexion simple.

Partons des équations (6-7), et soit à faire passer une géodésique par deux points dont les quatre coordonnées sont $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; (\lambda_2 \geq \lambda_1; \mu_2 \geq \mu_1)$. La variation de t , le long de l'arc de géodésique cherché, sera représentée par l'une des trois expressions

$$\begin{aligned}\varphi_1(k) &= (\lambda_1, \lambda_2), \\ \varphi_2(k) &= (\lambda_1, k) + (\lambda_2, k), \\ \varphi_3(k) &= (\lambda_1, -A) + (\lambda_2, -A);\end{aligned}$$

cette même variation sera aussi représentée par l'une des trois expressions

$$\begin{aligned}\psi_1(k) &= (\mu_1, \mu_2), \\ \psi_2(k) &= (k, \mu_1) + (k, \mu_2), \\ \psi_3(k) &= (-B, \mu_1) + (-B, \mu_2),\end{aligned}$$

et c'est en égalant les deux valeurs ainsi obtenues pour la variation de t que nous obtiendrons l'équation qui nous fera connaître k .

Supposons, en premier lieu, que les deux points donnés soient dans des feuillets opposés. Alors l'équation en k sera

$$\varphi_3(k) = \psi_3(k)$$

et k sera nécessairement compris entre $-A$ et $-B$.

Or, lorsque k croît, le premier membre est évidemment décroissant et le second croissant. D'ailleurs $\varphi_3(k)$ est infini pour $k = -A$ et $\psi_3(k)$ pour $k = -B$.

Donc le problème admet bien une solution et une seule.

Soient maintenant deux points situés dans des feuillets adjacents ayant, par exemple, des x de même signe et des y de signes différents; k sera déterminé par l'une des deux équations

$$(10) \quad \varphi_1(k) = \psi_3(k),$$

$$(11) \quad \varphi_2(k) = \psi_3(k);$$

il sera d'ailleurs compris entre les deux limites λ_2 et $-B$ dans le premier cas; λ_2 et $-A$ dans le second.

Envisageant la première de ces deux relations, faisons dé-

croître k depuis $-B$ jusqu'à λ_2 . Le second membre, d'abord infini, ira en décroissant, pendant que le premier ira croissant jusqu'à sa plus grande valeur $\varphi_1(\lambda_2)$. L'équation (10) aura donc une solution (et une seule) si l'on a

$$\varphi_1(\lambda_2) \geq \psi_3(\lambda_2).$$

Prenons maintenant l'équation (11), en faisant croître k depuis λ_2 jusqu'à $-A$, $\varphi_2(\lambda_2)$ étant évidemment égal à $\varphi_1(\lambda_2)$, le premier membre partira de la même valeur qu'avait atteinte finalement $\varphi_1(k)$. Je dis : 1° que ce premier membre est croissant; 2° que l'on a $\varphi'_2(k) > \psi'_3(k)$.

La dérivée $\psi'_3(k)$ est égale à

$$\int_{-B}^{\mu_1} -u'v \, d\lambda + \int_{-B}^{\mu_2} -u'v \, d\lambda,$$

en posant

$$u(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda - k}}; \quad -u' = -\frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{2(\lambda - k)\sqrt{\lambda - k}},$$

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{(A + \lambda)(B + \lambda)}};$$

quant à la dérivée $\varphi'_2(k)$, elle a pour valeur

$$\int_{\lambda_1}^k uv' \, d\lambda + \int_{\lambda_2}^k uv' \, d\lambda + u(\lambda_1)v(\lambda_1) + u(\lambda_2)v(\lambda_2),$$

ainsi qu'on le voit en faisant, dans l'intégrale $\varphi_2(k)$, la substitution $\lambda = k - \xi$. Cette dérivée est donc positive, puisqu'on a

$$v' = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{A + \lambda} - \frac{1}{B + \lambda} \right) > 0.$$

De plus, elle diminue de valeur lorsque, sans changer k , on remplace λ_1 et λ_2 par des quantités plus petites (algébriquement) λ'_1, λ'_2 , car le terme

$$(\lambda'_1, \lambda_1) + (\lambda'_2, \lambda_2),$$

ainsi ajouté à $\varphi(k)$, est une fonction décroissante de k . La plus petite valeur possible de $\varphi'_2(k)$ s'obtiendra donc en remplaçant λ_1 et λ_2 par $-\infty$, soit

$$\varphi'_2(k) > 2 \int_{-\infty}^k uv' \, d\lambda.$$

D'autre part, $\psi'_3(k)$ atteint sa plus grande valeur pour $\mu_1 = \mu_2 = \infty$. Nous avons donc à vérifier l'inégalité

$$(12) \quad 2 \int_{-\infty}^k uv' d\lambda > 2 \int_{-\infty}^{\infty} -u'v d\lambda.$$

Nous considérerons, pour cela, trois lacets, le premier c_1 joignant le point $\lambda = -\infty$ au point $\lambda = k$, le second c_2 joignant le point k au point $\lambda = +\infty$; le troisième c_3 entourant les points $\lambda = -A$, $\lambda = 0$. Le premier membre de l'inégalité sera

$$I = \int_{c_1} uv' d\lambda = \int_{c_1} -u'v d\lambda$$

(le chemin c_1 étant parcouru dans le sens positif de l'axe réel sur sa branche supérieure et le radical uv étant pris avec le signe + sur cette branche); ces deux valeurs sont, en effet, égales entre elles, parce que leur différence est égale à $\int_{c_1} d(uv)$ et que uv est nul à l'infini. Le second membre de cette inégalité sera

$$K = \int_{c_2} -u'v d\lambda,$$

le lacet c_2 étant également parcouru dans le sens positif sur sa branche supérieure, sur laquelle on suppose uv positif.

Mais, si l'on désigne de même par L l'intégrale $\int -u'v d\lambda$ prise suivant le chemin c_3 , dans des conditions de sens et de signe analogues aux précédentes, le théorème de Cauchy, appliqué à l'aire comprise entre les trois lacets et un cercle de rayon très grand, donne

$$K - I + L = 0,$$

car la fonction $-u'v$ est holomorphe dans cette aire, et si le radical uv est positif sur la branche supérieure de c_2 , il est négatif sur la branche supérieure de c_1 et positif sur la branche supérieure de L .

L'inégalité (12) est donc démontrée et il est établi que, à elles deux, les deux équations (10) et (11) ont une solution et une seule dans les limites demandées.

Enfin le cas où les deux points donnés sont dans le même feuillet n'offre aucune difficulté nouvelle; on a ici à résoudre l'une

des trois équations

$$\begin{aligned}\varphi_1(k) &= \psi_1(k), & (\lambda_2 < k < \mu_1), \\ \varphi_1(k) &= \psi_2(k), & (-B < k < \mu_1), \\ \varphi_2(k) &= \psi_1(k), & (\lambda_2 < k < -A),\end{aligned}$$

dont la première admet une solution si l'on a à la fois

$$\varphi_1(\lambda_2) > \psi_1(\lambda_2), \quad \varphi_1(\mu_1) < \psi_1(\mu_1);$$

la seconde, si l'on a

$$\varphi_1(\mu_1) > \psi_1(\mu_1);$$

la troisième, si l'on a

$$\varphi_1(\lambda_2) < \psi_1(\lambda_2).$$

Sur l'hyperboloïde à une nappe, la question se présente sous un aspect un peu différent, puisque, la surface étant à connexion double, deux points quelconques sont joints, non par une seule géodésique, mais par une infinité de telles lignes, correspondant aux différents types de chemins que l'on peut tracer de l'un à l'autre. Donc, pour déterminer une géodésique passant par deux points donnés, nous nous donnerons le type auquel elle appartient, et c'est sous cette condition que la géodésique cherchée devra exister et être unique. Cette circonstance n'introduit d'ailleurs d'autre difficulté que celle de l'énumération des cas, la vérification étant au fond analogue à celle qui était relative au paraboloïde.

En désignant encore par $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$ (avec $\lambda_2 \geq \lambda_1, \mu_2 \geq \mu_1$) les coordonnées elliptiques des deux points donnés, la variation θ de t sur l'arc cherché, exprimée à l'aide de la variation de λ , aura l'une des expressions ⁽¹⁾

$$\begin{aligned}(13) \quad \theta &= F_n(k) = |[\lambda_1, \lambda_2] + 2n[-A, -B]| \\ (14) \quad \theta &= \Phi_n(k) = |[-A, \lambda_1] + [-A, \lambda_2] + 2n[-A, -B]| \\ (15) \quad \theta &= \bar{F}(k) = [\lambda_1, k] + [\lambda_2, k], \\ (16) \quad \theta &= \bar{\Phi}(k) = [-A, \lambda_1] + [\lambda_2, k] \\ &\quad + [-A, k] = 2[-A, k] - [\lambda_1, \lambda_2]\end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (k > -B), \\ (si \ n \neq 0), \\ (-A < k < -B), \end{array}$$

⁽¹⁾ Il semblerait, au premier abord, que la variation de t puisse être encore exprimée par

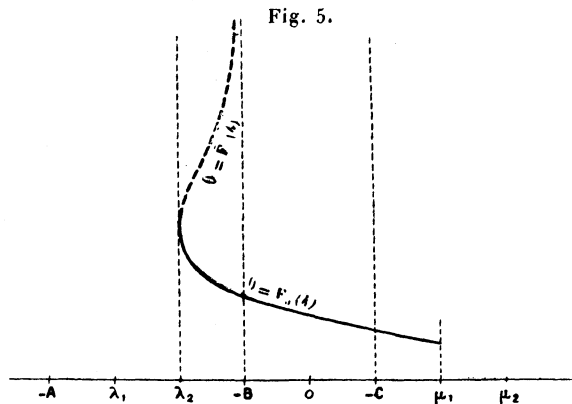
$$(16') \quad \theta = [-A, \lambda_2] + [\lambda_1, k] + [-A, k] = 2[-A, k] + [\lambda_1, \lambda_2],$$

mais c'est ce qui ne peut être, à cause de l'inégalité $2[-A, k] > 2[-C, z]$ précédemment démontrée.

(n étant un entier positif, négatif ou nul et le signe $|$ désignant des valeurs absolues).

Le choix à faire entre ces différentes expressions, ainsi que la valeur à prendre pour n , doit être, en général, considéré comme indiqué par la nature de la question, car l'indication des feuillets dans lesquels sont situés les points donnés permet de choisir entre les équations (13) et (14) et fait connaître la parité de n , pendant que la considération du type achève de déterminer cet entier. Alors la courbe ($\ominus$), qui a pour abscisses les valeurs de k et pour coordonnées les valeurs de θ , se compose d'un arc asymptote à la droite $k = -B$, l'ordonnée θ allant en décroissant de $+\infty$ à une certaine valeur finie lorsque k croît de $-B$ à sa limite supérieure μ .

Il n'y a d'exception que pour $n = 0$, cas auquel θ peut parfaitement (sans que nous en soyons avertis par les données du problème) être fourni par la formule (15) et non par la formule (13), ou par la formule (16) et non par la formule (14) : dans ce cas, la courbe ($\ominus$) se compose de deux arcs, l'un, $\theta = \bar{F}(k)$ [ou $\theta = \bar{\Phi}(k)$]



asymptote à la droite $k = -B$ et le long duquel θ décroît de $+\infty$ à une certaine valeur finie pendant que k décroît de $-B$ à λ_2 ; l'autre, $\theta = F_0(k)$ [ou $\theta = \Phi_0(k)$], le long duquel θ décroît à partir de la valeur finie dont il vient d'être question, tandis que k croît de λ_2 à μ_1 ; ces deux arcs se raccordent entre eux au point $k = \lambda_2$ (et sont d'ailleurs deux arcs consécutifs d'une même courbe analytique) (fig. 5).

Pareillement, la variation θ_1 de t , évaluée à l'aide de la variation de μ , aura l'une des expressions

$$(17) \quad \theta_1 = \Pi(k) = [-C, \mu_1] + [-C, \mu_2] \quad (k < -C),$$

$$(18) \quad \theta_1 = \Psi(k) = [\mu_1, \mu_2],$$

$$(19) \quad \theta_1 = \bar{\Psi}(k) = [k, \mu_1] + [k, \mu_2] \quad (k > -C),$$

le choix entre l'équation (17) et l'une des équations (18), (19) étant indiqué par la situation des deux points donnés relativement à l'ellipse de gorge, mais non le choix entre (18) et (19); de sorte que la courbe ($\oslash$), qui a les valeurs de k pour abscisses et les valeurs de θ_1 pour ordonnées, se compose : si les deux points donnés sont de côtés différents par rapport à l'ellipse de gorge, d'un seul arc, $\theta_1 = \Pi(k)$, le long duquel θ_1 croît constamment et indéfiniment pendant que k croît jusqu'à $-C$; si les deux points donnés sont du même côté par rapport à cette ellipse, de deux arcs, $\theta_1 = \Psi(k)$ et $\theta_1 = \bar{\Psi}(k)$ se raccordant entre eux pour $k = \mu_1$, de sorte que, dans la courbe totale, θ_1 croît encore constamment et indéfiniment; mais que k croît de λ_2 à μ_1 pour décroître ensuite de μ_1 à $-C$.

La valeur cherchée de k est donnée par l'équation $\theta_1 = \theta$ ou par l'intersection des courbes ($\oslash$) et ($\oslash$): ces deux courbes ont bien évidemment un point commun; le fait qu'elles n'en ont qu'un seul résulte de ce que :

Pour $\theta = F_n(k)$ ou $\Phi_n(k)$, avec $\theta_1 = \Pi(k)$ ou $\Psi(k)$, θ est décroissant et θ_1 croissant;

Pour $\theta = \bar{F}(k)$ ou $\bar{\Phi}(k)$ [avec $\theta_1 = \Pi(k)$ ou $\Psi(k)$], on a

$$\frac{d\theta}{dk} > \frac{d\theta_1}{dk}$$

(démonstration analogue à celle qui a été faite plus haut, la limite $-\infty$ étant simplement remplacée par $-B$);

Pour $\theta_1 = \bar{\Psi}(k)$ [avec $\theta = F_n(k)$ ou $\Phi_n(k)$], on a

$$\left| \frac{d\theta_1}{dk} \right| > \left| \frac{d\theta}{dk} \right|,$$

non point constamment (cela n'a évidemment point lieu si n est très grand), mais (ce qui nous suffit) lorsque $\theta_1 - \theta$ s'annule.

Pour établir ce dernier point, remarquons que l'une quelconque des fonctions $F_n(k)$, $\Phi_n(k)$ peut toujours s'écrire sous la forme

$$\theta = 2n'[-A, -B] + [I],$$

n' étant un entier *non négatif* et I un intervalle ou un ensemble d'intervalles (indépendant de k) intérieurs à l'intervalle $(-A, -B)$ et tels qu'un nombre quelconque compris entre $-A$ et $-B$ ne soit pas situé dans plus de deux d'entre eux.

Faisons usage de l'équation

$$(9) \quad 2[k, \infty] = 2[-A, -B] + 2[0, -C],$$

précédemment obtenue; soit d'abord $n' = 0$; alors on aura constamment

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\theta}{dk} \right| &= \left| \frac{d}{dk} [I] \right| < 2 \left| \frac{d}{dk} [-A, -B] \right| \\ &< 2 \left| \frac{d}{dk} [k, \infty] \right| < \left| \frac{d}{dk} ([k, \mu_1] + [k, \mu_2]) \right|, \end{aligned}$$

la seconde inégalité résultant de ce que $\frac{d}{dk} [0, -C]$ est négatif; la troisième, de ce que, comme précédemment, le minimum de $\left| \frac{d}{dk} ([k, \mu_1] + [k, \mu_2]) \right|$ a lieu pour $\mu_1 = \mu_2 = \infty$.

Soit maintenant $n' \neq 0$; il suffit de montrer que l'inégalité

$$(20) \quad \left| \frac{d}{dk} (2n'[-A, -B] + [I]) \right| < 2 \left| \frac{d}{dk} [k, \infty] \right|$$

a lieu, non point constamment, mais en vertu de l'équation

$$2n'[-A, -B] + [I] = [k, \mu_1] + [k, \mu_2],$$

ou encore de l'inégalité qui en résulte

$$(21) \quad 2n'[-A, -B] + [I] \leq 2[k, \infty].$$

Or, en vertu de la relation (9), les deux inégalités (21) et (20) s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} 2(n'-1)[-A, -B] + [I] &\leq 2[0, -C], \\ \left| \frac{d}{dk} \{ 2(n'-1)[-A, -B] + [I] \} \right| &\leq 2 \left| \frac{d}{dk} [0, C] \right|; \end{aligned}$$

et il devient clair que la première entraîne la seconde, car on

pas de l'élément d'intégrale

$$[I] = \int_1 d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda - k)(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}}$$

à l'élément d'intégrale $\frac{d[I]}{dk}$ en multipliant par $\frac{1}{2(\lambda - k)}$ et, par conséquent, le rapport des premiers membres des deux inégalités précédentes est $\frac{1}{2(k - \lambda')}$, λ' étant compris entre $-A$ et $-B$, tandis que le rapport des seconds membres est $\frac{1}{2(k - \lambda'')}$, λ'' étant compris entre 0 et $-C$.

En un mot, la relation (9) permet, à elle seule, de répondre à la question dans tous les cas.

Si le nombre n qui figure dans les relations (13) et (14) est très grand, θ a nécessairement une très grande valeur (puisque $[-A, -B]$ ne descend jamais au-dessous d'une certaine limite lorsque k varie de λ_2 à μ_1); il doit donc en être de même de θ_1 , ce qui ne se peut que si k est très voisin de $-C$. Nous voyons donc bien, conformément à ce qui se passe, d'une façon générale, sur les surfaces à courbures opposées, que *si l'on joint deux points donnés m, m' par une géodésique effectuant un nombre de plus en plus grand de circulations autour de l'hyperboloïde, la direction initiale de cette géodésique en un quelconque de ses points extrêmes m, m' tend vers celle de l'asymptote menée du même point à l'ellipse de gorge.*

Supposons, au contraire, que la géodésique considérée varie, d'une manière continue, pendant qu'une de ses extrémités reste fixe, mais que l'autre s'éloigne indéfiniment sur une géodésique donnée L . Dans ces conditions, nous savons que la géodésique variable tend vers une position déterminée L' , qu'on peut encore appeler une *asymptote* ou une *parallèle lobatchewskienne* ⁽¹⁾ menée du point donné à la géodésique donnée. Il est aisé de trouver ici cette position limite. La géodésique variable sera, en effet, déterminée par l'équation $\theta_1 = \theta$, dans laquelle λ_2, μ_2 seront les coordonnées du point mobile de L , et nous savons

(1) Il est clair que les *parallèles* dont nous parlons ici ne doivent pas être confondues avec les courbes généralement désignées sous ce nom dans la Théorie des surfaces.

que λ_2 tend vers une limite déterminée λ_0 , pendant que μ_2 tend vers ∞ : la valeur de k relative à L' s'obtient donc par la même équation $\theta_1 = \theta$, où l'on aura fait $\lambda_2 = \lambda_0$, $\mu_2 = \infty$.

Il est, dès lors, évident que la limite analogue à λ_0 relative à L' est égale à λ_0 ; ainsi, *les géodésiques asymptotes entre elles, sur l'hyperboloïde à une nappe, sont celles pour lesquelles la limite du paramètre λ est la même.*

On sait que si, sur une surface à courbure négative, deux géodésiques parallèles ⁽¹⁾ entre elles restent dans une région finie, ou si la courbure de la surface ne tend pas vers zéro, lorsqu'on s'éloigne à l'infini, la distance mutuelle de ces deux géodésiques tend vers zéro. En est-il de même dans le cas actuel ?

La réponse est négative : elle résulte de ce que la valeur de k est différente sur les deux courbes (nous savons, en effet, que la quantité λ_0 dépend des *deux* constantes d'intégration) et que, par conséquent, d'après ce qui a été vu précédemment [formules (5)] sur les allures des géodésiques à l'infini, nos deux courbes sont asymptotes à deux droites différentes.

Les résultats sont tout semblables sur le paraboloïde hyperbolique : sur ce dernier, deux géodésiques seront parallèles si la limite q du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, donnée par la formule (8), est la même pour l'une et pour l'autre; dès lors, si les deux courbes ne sont pas confondues, les valeurs de k qui leur correspondent ne seront pas les mêmes, puisque la formule (8) contient la seconde constante d'intégration. Donc aussi les asymptotes rectilignes [formules (8')] seront différentes.

Ainsi la théorie des géodésiques parallèles sur les surfaces du second degré réglées, tout en étant, d'une façon générale, analogue à la théorie des parallèles en Géométrie non euclidienne, s'en éloigne et se rapproche de la théorie euclidienne par ce fait que la distance de deux parallèles tend, non pas vers zéro, mais vers une limite finie, propriété qui tient, bien entendu, à ce que la courbure tend vers zéro sur les nappes infinies.

(1) Voir la note de la page précédente.