BULLETIN DE LA S. M. F.

F. DUMONT

Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième ordre générales

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 124-129
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__124_1>

SUR DEUX FORMES PARTICULIÈRES DE L'ÉQUATION RÉDUITE DES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE GÉNÉRALES;

Par M. F. Dumont.

L'équation des surfaces du troisième ordre en coordonnées tétraédriques peut être ramenée à ne contenir que sept paramètres, puisque les formules générales relatives au changement de tétraèdre de référence permettent de disposer de douze coefficients.

La forme $ax^3 + by^3 + cz^3 + du^3 + ev^3 = 0$, où x, y, z et u sont les faces du tétraèdre de référence et v un cinquième plan, est une des formes réduites à sept paramètres. Il en est de même de la forme

$$ax^2y + by^2z + cz^2t + dt^2x + 2fxyz + 2gyzt + 2hztx + 2ktxy = 0,$$

pour laquelle le tétraèdre de référence est à la fois inscrit et circonscrit.

Deux autres formes à sept paramètres semblent aussi importantes pour l'étude des surfaces cubiques.

La première est

$$\text{(I)}\quad Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dt^3 + 6Exyz + 6Fxyt + 6Gyzt + 6Hxzt = 0$$

ou, en projetant de façon que l'une des faces passe à l'infini,

$$\text{(1)}\quad ax^3 + by^3 + cz^3 + 6exyz + 6fxy + 6gyz + 6hxz + d = 0.$$

Elle suppose l'existence d'un tétraèdre autopolaire, c'est-à-dire dont chaque sommet a la face opposée pour plan polaire *par rapport à la surface.*

L'existence de pareils tétraèdres résulte de ce que, si l'on exprime que, des quatre points $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$, $x_4y_4z_4$, chacun est sur le plan polaire des trois autres, on a précisément douze équations, nombre des coordonnées à déterminer; ce raisonnement ne prouve pas du reste l'existence d'un tétraèdre à quatre sommets réels, pouvant être pris pour tétraèdre de référence de sorte que la généralité de l'équation (1) reste à prouver et les cas particuliers qu'elle ne comprend pas, à énumérer.

On voit qu'elle comprend des surfaces à quatre points doubles pour $a = b = c = d = 0$; des surfaces de Lamé pour

$$e = f = g = h = 0;$$

des surfaces à trois binodes, pour $a = b = c = f = g = h = 0$; on obtient aussi des surfaces à 1, 2, 3 cnicnodes, et les équations, cependant particulières,

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 6exyz + d = 0,$$
$$ax^3 + by_3 + cz_3 + 6fxy + 6gyz + 6hxz + d = 0,$$

représentent des surfaces sans points singuliers, si les coefficients sont nuls et ne satisfont pas à une certaine condition (qui est $abc + 8e^3 = 0$ pour la première).

La seconde forme que l'on veut signaler ici est la suivante :

$$(2)\quad 6xyz + 3A_1x^2 + 3A_2y^2 + 3A_3z^2 + 6B_1yz + 6B_2zx + 6B_3xy + D = 0,$$

qui n'est pas générale *absolument,* puisque certains cas particuliers lui échappent, mais qui est générale *relativement* (en entendant par là une forme capable de contenir les cas où la surface ne présente pas de singularités ponctuelles).

Pour l'établir, il suffit de remarquer que, sur toute surface générale, il existe un triangle réel (et il en est de même, du reste, de la plupart des classes de surfaces cubiques présentant des singularités); soit ABC un tel triangle. Le plan du triangle ABC a huit pôles par rapport à la surface, trois d'entre eux sont les sommets A, B, C et chacun d'eux compte, en général comme pôle simple; il en résulte que les pôles situés hors du plan sont en nombre impair, savoir cinq; que par suite l'un au moins d'entre eux est réel : soit P ce pôle réel. Si l'on rapporte la surface au tétraèdre ABCP l'équation prend la forme

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} 6xyz + 3\alpha_1x^2t + 3\alpha_2y^2t + 3\alpha_3z^2t \\ \quad + 6\beta_1yzt + 6\beta_2zxt + 6\beta_3xyt + \delta t^3 = 0. \end{cases}$$

Si maintenant l'on projette homographiquement la figure de façon que, P restant le point $x = y = z = 0$, la face $t = 0$ passe à l'infini, l'équation prend en coordonnées ordinaires la forme (2).

Ainsi, toute surface générale peut être représentée par (II) et projetée suivant une surface représentée par (2).

Cette équation est de la forme

$$xyz + Q = 0,$$

Q étant une fonction qui, égalée à zéro, représente une quadrique ayant P comme centre; de telle sorte que la *discussion de cette forme se ramène à la discussion de la quadrique* Q, que nous appellerons la *quadrique associée* du plan $t = 0$ (ou bien du plan de l'infini). On voit que si t_1, t_3, t_5 désignent les nombres de triangles réels de la surface ayant un, trois ou cinq pôles réels hors de leur plan, il y a $t_1 + 3t_3 + 5t_5$ manières de réduire l'équation de la surface à la forme

$$xyz + Q = 0.$$

La quadrique associée coupe la surface suivant trois coniques situées dans les plans $x = 0, y = 0, z = 0$ et dont les centres sont au point P.

Considérons quelques cas particuliers.

1° *Cas d'un cnicnode* C_2. — Les droites passant par C_2 peuvent être imaginaires, mais il est évident que les quinze autres ne sauraient l'être, puisque toute droite réelle passant par C_2 doit couper la surface en un troisième point réel. Or ces droites forment des triangles réels. D'autre part, tout point double étant sur la quadrique polaire d'un point quelconque et en particulier de tous les points d'un plan tritangent, réciproquement, tout point d'un tel plan est situé sur le plan polaire du point double, c'est-à-dire que, parmi les pôles du plan tritangent, se trouve le point double. Choisissant ce point pour

$$x = y = z = 0,$$

l'équation a la forme

$$xyz + C = 0,$$

$C = 0$ étant l'équation d'un cône du deuxième degré de sommet $x = y = z = 0$.

2° *Cas de deux cnicnodes* C_2, C'_2. — On trouve par des considérations analogues que, même dans le cas où les droites passant par C_2 et C'_2 sont imaginaires, l'équation peut se ramener à (supposant le plan $t = 0$ rejeté à l'infini)

$$2xyz + (\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2 + A_3 z^2 + 2B_1 yz + 2B_2 zx = 0,$$

et que si, parmi les droites passant par les points doubles, il s'en trouve un couple (l'une passant par C_2, l'autre par C'_2) de réelles, on pourra obtenir la forme

$$6xyz + 3A_3 z^2 + 6B_1 yz + 6B_2 zx + 6B_3 xy + D = 0.$$

3° *Cas de trois cnicnodes* $C_2 C'_2 C''_2$. — On trouve de suite la forme

$$6xyz + 6B_1yz + 6B_2zx + 6B_3xy + D = 0\,;$$

le cône asymptote de la quadrique associée passe par les axes.

On peut de même obtenir les formes suivantes.

4° *Cas d'un binode* B_3 *à biplan réel*

$$6xyz + 3A_2y^2 + A_3z^2 + 6B_1yz + 6B_3xy + D = 0.$$

Si le biplan n'est pas réel, il existe cependant des triangles réels sur la surface, formés par des droites ne passant pas par B_3, de sorte que l'on a encore une équation rentrant dans le type considéré.

5° *Cas d'un binode* B_4. — Il suffit de faire $Dz = -3A_3B_3^2$ dans l'équation précédente.

6° *Cas d'un binode* B_5. — On a

$$2xyz + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_3xy - A_3B_3^2 = 0.$$

Dans le cas d'un binode B_6, les trois droites que possède la surface, qui ne sont, du reste, pas nécessairement toutes réelles, ne forment plus un triangle. Ce cas n'est donc pas compris dans la formule (I). Il en est de même si le point singulier de la surface est un *unode* U_6, U_7 ou U_8 (notation Salmon).

Au contraire, les cas (C_2, B_3), (B_3, B'_3), (C_2B_4), (C_2, B_5), ($C_2C'_2B_3$), ($C_2C'_2B_4$), ($C_2B_3B'_3$), ($B_3B'_3B''_3$), ($C_2C'_2C''_2C'''_2$) sont compris dans la forme (I), mais le cas (C_2B_6) ne l'est pas.

Une surface réglée à directrice simple est représentée par

$$2xyz + A_1x^2 + A_2y^2 + 2B_3xy = 0.$$

Enfin, une surface réglée sans directrice simple, c'est-à-dire sur une *surface de Cayley,* échappe à la forme considérée puisqu'une telle surface n'a pas de triangle.

En résumé, dix-sept des vingt-trois classes sont représentables par la forme

$$xyz + Q = 0.$$

Addition à l'article précédent.

Il faut lire, dans l'article précédent (page 127, ligne 9) : *ne sauraient l'être toutes;* il est clair en effet qu'une partie de ces droites peuvent être imaginaires, savoir, dans le cas où les droites d passant par le cnicnode sont imaginaires, celles qui sont dans les plans déterminés par deux droites d non conjuguées.

C'est par erreur que le cas U_6 a été donné (page 128) comme non compris dans la formule $xyz + Q = 0$, car on peut obtenir pour ce cas la forme

$$xyz + (mx + ny = pz)^2 t = 0$$

et indépendamment des trois droites situées dans le plan tangent au point U_6, la surface en possède trois autres formant un triangle.

Enfin, pour quelques-uns des cas donnés comme compris dans cette forme $xyz + Q = 0$, la quadrique Q n'est plus la *quadrique associée* du plan $t = 0$, en prenant cette expression dans le sens indiqué au début de l'article. Par exemple, dans le cas $C_2 + B_5$, on peut ramener l'équation à la forme

$$2xyz + t(ax^2 + bzt + 2cxz) = 0,$$

mais le cône

$$ax^2 + bzt + 2cxz = 0$$

n'a pas pour sommet $(x = y = z = 0)$ mais $(x = z = t = 0)$. Dans ce cas, le plan $t = 0$ du triangle mis en évidence a seulement pour ses huit pôles les sommets de ce triangle, savoir le binode $B_5 (x = z = t = 0)$ compté cinq fois, le cnicnode $(x = y = t = 0)$ compté deux fois et le sommet $(y = z = t = 0)$ compté une fois.