BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 29-41
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__29_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1875-1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes; par M. Halphen.

(Séance du 1er décembre 1875.)

1. C'est dans le Calcul intégral que la notion du *genre* des courbes algébriques a pris naissance. Par cette voie, il est immédiatement visible que le genre se conserve dans les transformations *uniformes*. Pour introduire dans la Géométrie cette notion nouvelle, il fallait connaître l'expression analytique du genre. Cette question était résolue dans des cas particuliers, notamment dans celui où la courbe considérée ne contient que des singularités *ordinaires*. J'en ai donné la solution générale suivante :

Soient p le genre, m le degré, c la classe d'une courbe algébrique, N *la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et* T *le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers. Ces éléments satisfont à la relation*

$$(1) \qquad 2(p-1) = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T}\;(^1).$$

Le nombre p, défini par cette relation, se conserve dans les trans-

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1833, et t. LXXX, p. 638.

formations uniformes. C'est ce que nous apprend le Calcul intégral. Il est naturel de désirer une démonstration directe de cette proposition. On en possède déjà plusieurs pour le cas particulier déjà cité, où la courbe considérée ne contient que des singularités ordinaires [1]. On peut passer de là au cas général, comme je l'ai déjà montré, en employant diverses transformations uniformes particulières, qui changent une courbe quelconque en une autre n'offrant que des singularités ordinaires; mais ces détours peuvent être évités; l'objet de ce petit Mémoire est de présenter une démonstration directe de la proposition suivante : *L'expression qui figure au second membre de l'équation* (1) *a la même valeur pour deux courbes quelconques se correspondant* point par point [2].

2. Il est nécessaire de donner quelques explications préliminaires au sujet des *systèmes circulaires*. Soient O l'origine des coordonnées (x, y), un point singulier d'une courbe plane algébrique S, et k l'ordre de multiplicité de ce point. Pour une valeur infiniment petite de x, k valeurs de y sont infiniment petites. On sait que ces k valeurs se répartissent en *systèmes circulaires* [3], c'est-à-dire en des groupes tels que les n valeurs, comprises dans l'un quelconque d'entre eux, forment une seule et même fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$. Or on prouve aisément que cette répartition ne dépend pas des axes de coordonnées, pourvu toutefois que l'axe des y ne soit pas une tangente de S au point O. On a donc ainsi une répartition des branches de S, au point O, en des groupes bien définis, que j'appelle *systèmes circulaires* de branches. Le nombre n est l'*ordre de multiplicité,* le point O est l'*origine* d'un tel système circulaire.

Soit $f(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, et ne s'évanouissant pas avec cette variable; soient n et r des entiers positifs. Les équations

$$x = t^n, \quad y = t^r f(t) \tag{2}$$

---

(1) Clebsch et Gordan, *Fonct. ab.; *Zeuthen, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

(2) Au congrès de l'Association française, j'ai donné cette année, du même théorème, une autre démonstration, fondée sur des considérations géométriques.

(3) Puiseux, *Journal de Mathématiques;* 1850.

définissent, de la manière la plus générale, y comme fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$, s'évanouissant avec x. Pour chaque valeur de x, cette fonction a un nombre de valeurs égal à n ou à un diviseur de n. Donc, sous les conditions que y ait précisément n valeurs et que r ne soit pas inférieur à n (pour que l'axe des y ne soit pas la tangente), les équations (2) définissent, de la manière la plus générale, un système circulaire de branches dont l'ordre de multiplicité est n, et dont l'origine est le point O. Si r est supérieur à n, la tangente est l'axe des x. Pour que les axes soient quelconques, on doit supposer $r = n$. Si la fonction y, définie par (2), a moins de n valeurs, les équations (2) définissent, en supposant toujours $r = n$, un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est égal au nombre de ces valeurs.

Au lieu des équations (2), considérons celles-ci :

$$(3) \qquad x = t^n \varphi(t), \quad y = t^n \psi(t),$$

n étant toujours un entier positif, et φ et ψ des fonctions de même définition que f. On démontre aisément que l'élimination de t entre les équations (3) conduit à

$$y = x\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

où θ est encore une fonction de même définition que f. C'est précisément la forme du résultat auquel conduit l'élimination de t entre les équations (2), où l'on suppose $r = n$. Ainsi, de même que les équations (2), les équations (3) définissent, sans plus de généralité, un système circulaire de branches dont l'origine est en O, et dont l'ordre de multiplicité est n ou un diviseur de n.

3. Soit S une courbe contenant le système circulaire de branches représenté par les équations (2). Je suppose que l'ordre de multiplicité de ce système circulaire soit effectivement n. Je désigne abréviativement le système circulaire par (S). Soit maintenant Σ une seconde courbe, qui soit une transformée *rationnelle* de S. Si x, y sont les coordonnées d'un point a de S, les coordonnées ξ, η du point correspondant α de Σ sont des fonctions rationnelles de x, y. Si donc a est infiniment voisin de O, et sur une branche de (S), les coordonnées de α sont des fonctions synectiques de t, sauf au cas

où elles seraient infinies. J'écarte ce cas en employant, au besoin, une transformation homographique. Les coordonnées de α tendent donc, pour t infiniment petit, vers des limites finies et déterminées d'une seule manière. Donc, en premier lieu, au point O, considéré sur S comme limite des points du système circulaire (S), correspond un seul point Ω sur Σ. Supposant alors Ω origine des coordonnées ξ, η, j'ai, pour les valeurs des coordonnées de α, des expressions telles que

$$(4) \qquad \xi = t^\sigma \Phi(t), \quad \eta = t^\sigma \Psi(t),$$

où Φ et Ψ sont des fonctions de même définition que f, et où σ est un entier positif. Comme on l'a vu au n° 2, les équations (4) définissent un système circulaire de branches (Σ), dont l'ordre de multiplicité est σ ou un diviseur de σ. Si ν est l'ordre de multiplicité de (Σ), σ est ainsi un multiple entier de ν. Donc :

Théorème I. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes planes algébriques dont la seconde soit une transformée rationnelle de la première :*

1° *A un système circulaire de branches* (S) *de la première correspond un seul système circulaire de branches* (Σ) *de la seconde.*

2° *Soient* n *et* ν *les ordres respectifs de multiplicité des systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ) ; *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre* n *de l'origine de* (S), *correspond sur* (Σ) *un point dont la distance à l'origine de* (Σ) *est un multiple entier de* ν.

Il est visible que le nombre entier $\frac{\sigma}{\nu}$ est égal au nombre des points a de (S) qui correspondent à un point α de (Σ). Si donc on suppose maintenant que la courbe S soit, à son tour, une transformée rationnelle de Σ, c'est-à-dire que les courbes S et Σ se correspondent *point par point*, σ est égal à ν. On a donc cette nouvelle proposition :

Théorème II. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes algébriques se correspondant* point par point, *et* n *et* ν *les ordres de multiplicité respectifs de deux systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ) : *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre* n *de l'origine de* S *correspond un point de* (Σ) *à distance infiniment petite d'ordre* ν *de l'origine de* (Σ).

4. Le théorème II est le point essentiel de cette théorie. Je n'aurai recours dans ce qui va suivre à aucun autre résultat nouveau. Toutefois, avant d'arriver à l'objet même de ce travail, je crois utile de rappeler brièvement un procédé pour déterminer l'ordre de multiplicité d'un système de solutions de deux équations à deux inconnues. Ce procédé a pour point de départ la proposition suivante :

Soit $F(x, y) = 0$ *l'équation sous forme entière d'une courbe algébrique plane. Le nombre des intersections de cette courbe et d'une autre courbe* S, *du même plan, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités infiniment petites* $F(x, y)$, *quand on suppose le point* (x, y) *placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de* O, *sur les diverses branches de* S.

Je suppose que, au point O, la courbe S comprenne divers systèmes circulaires (S), (S′), ... Soit h la somme des ordres des quantités infiniment petites $F(x, y)$, quand on suppose le point (x, y) placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de O, sur les diverses branches de (S). Soit de même h' le nombre analogue pour (S′), ... Le nombre des intersections des deux courbes en O est $h + h' + \dots$

Soit maintenant n l'ordre de multiplicité de (S), que je suppose défini par les équations (2). Pour calculer l'élément de h, relatif à une quelconque des branches de (S), on substituera dans $F(x, y)$ les valeurs de x et y, données par (2), en supposant t infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{n}$. Par suite h se compose de n éléments égaux. Donc h est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient $F(x, y)$ quand on suppose t infiniment petit du premier ordre. En d'autres termes, h est égal à l'exposant de t au premier terme de $F(x, y)$, ordonné suivant les puissances ascendantes de t, après substitution à x et y des valeurs (2). C'est ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que :

Le nombre des intersections d'un système circulaire (S) *avec une courbe* $F(x, y) = 0$, *qui passe à l'origine* O *de ce système circulaire, est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient le polynôme entier* $F(x, y)$, *quand on y suppose le point* (x, y)

placé sur une branche de (S) *à une distance de l'origine de* (S) *dont l'ordre infinitésimal est égal à l'ordre de multiplicité de* (S).

5. J'arrive, ces préliminaires établis, à mon objet principal. J'emploie des coordonnées homogènes. Soit $S(x, y, z) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique. Soient, en outre, u, v, w trois fonctions entières et homogènes de x, y, z. Par les équations

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \tag{5}$$

je définis, de la manière la plus générale, une transformée rationnelle Σ de la courbe S. A chaque point $a(x, y, z)$ de S correspond un seul point α (ξ, η, ζ) de Σ. La réciproque, pour des valeurs particulières de u, v, w, peut n'être pas exacte : à chaque point α il peut se faire qu'il corresponde plusieurs points a. J'en désignerai par k le nombre. Si k est égal à l'unité, les deux courbes S et Σ se correspondent *point par point,* ou la transformation (5) est, pour les deux courbes, une transformation *uniforme.* Sans troubler la généralité, on peut supposer les trois fonctions u, v, w du même degré; car cette supposition sera toujours réalisée au moyen d'un changement de coordonnées. Je désignerai par q le degré de u, v, w, et par m celui de S.

Je cherche d'abord le degré μ de Σ. Les points a, tels que leurs correspondants α soient sur une droite arbitrairement donnée, sont les intersections de S avec la courbe

$$F(x, y, z) = au + bv + cw = 0, \tag{6}$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires. Le nombre des solutions est mq; mais il faut en défalquer, comme étrangères, celles qui ne dépendent pas des constantes arbitraires : ces solutions répondent aux points dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. Soit O un de ces points; soit n l'ordre de multiplicité d'un des systèmes circulaires (S) formés par les branches de S en O; plaçons le point a sur une branche de (S) à distance infiniment petite d'ordre n de O. Soit h l'ordre d'infiniment petit auquel appartient alors $F(x, y, z)$. Soit Σh la somme des nombres analogues pour tous les systèmes circulaires de branches de S aux divers points dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. D'après le n° 4, le nombre total des intersections des courbes S et F, réunies en ces points, est Σh. Le nombre des solutions non étrangères est donc $mq - \Sigma h$. Mais, à chacun des points α, situés sur la droite considérée, et dont le nombre est μ, correspondent k points a dont les coordonnées font évanouir F ; donc

$$k\mu = mq - \Sigma h. \tag{7}$$

6. Je vais maintenant calculer la classe de la courbe Σ. En employant des majuscules pour les coordonnées courantes, j'ai, pour la tangente de Σ en un point α, l'équation

$$A = \begin{vmatrix} X & u & du \\ Y & v & dv \\ Z & w & dw \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Sous forme explicitement entière, cette équation se change, par un calcul facile, en la suivante :

$$B = \begin{vmatrix} X & u_1 & u_2 & u_3 \\ Y & v_1 & v_2 & v_3 \\ Z & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

où, suivant l'usage, j'ai posé

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3,$$

et de même pour les autres fonctions. Si l'on considère X, Y, Z comme données arbitrairement, les intersections de la courbe B et de S sont les points a, tels que les tangentes de Σ aux points correspondants α passent en un point donné. Le nombre de ces points, défalcation faite des solutions étrangères, c'est-à-dire indépendantes des arbitraires X, Y, Z, est égal à k fois la classe de Σ. Ce sont les solutions étrangères qu'il s'agit actuellement de compter.

Soient s la variable indépendante, que je laisse pour le moment indéterminée, et

$$\mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz = ds$$

sa différentielle totale. Soit aussi l'équation qui lie les coordonnées homogènes

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 1, \tag{10}$$

où λ_1, ... sont des constantes. Cette dernière a lieu également entre X, Y, Z et aussi entre ξ, η, ζ. Par suite, les relations (5) se complètent en

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w} = \frac{1}{\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w},$$

et il en résulte

$$A = (\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)^2 \begin{vmatrix} X & \xi & d\xi \\ Y & \eta & d\eta \\ Z & \zeta & d\zeta \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Je pose maintenant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Cela étant, on vérifiera aisément que, pour les valeurs de x, y, z satisfaisant à $S = 0$, on a

$$B = q\Delta \frac{A}{ds}. \tag{13}$$

Les points dont les coordonnées font évanouir Δ peuvent être classés en deux groupes : d'abord ceux dont les coordonnées dépendent de μ_1, μ_2, μ_3, c'est-à-dire du choix de la variable indépendante. Il est manifeste que les coordonnées de ces points ne font pas évanouir B, dont l'expression ne dépend pas de ce choix. On voit donc que, pour ces points, ds est nul, et que le second membre de (13) conserve une valeur finie. Le second groupe est composé de points dont les coordonnées font évanouir à la fois S_1, S_2, S_3. Ce sont les points singuliers de S. A ces points correspondent des solutions étrangères, puisque les coordonnées de ces points font évanouir B, quelles que soient les arbitraires X, Y, Z.

En second lieu, les autres solutions étrangères sont fournies, d'après (13), par les points dont les coordonnées font évanouir A, quelles que soient les arbitraires. Ces points sont ceux en lesquels les trois mineurs, tels que $(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi)$, s'évanouissent, c'est-à-dire les points singuliers de Σ.

Ainsi, en résumé, les solutions étrangères que nous cherchons répondent à des points singuliers, soit de S, soit de Σ, soit des deux courbes à la fois. Soit maintenant O un point répondant à une solution étrangère; je compterai l'ordre de multiplicité de cette solution d'après la règle du n° 4. J'ai donc à chercher l'ordre d'infiniment petit auquel appartient B quand on y substitue à x, y, z les coordonnées d'un point a, qui, situé sur une branche d'un système circulaire (S) d'origine O et d'ordre de multiplicité n, est à distance infiniment petite du $n^{\text{ième}}$ ordre de O. D'après l'équation (13), je pourrai, pour trouver cet ordre, opérer séparément sur Δ et sur $\frac{A}{ds}$, et faire la somme des résultats. Je m'occupe du facteur $\frac{A}{ds}$, en premier lieu.

Les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation (10) peuvent être considérées comme tout à fait arbitraires; car changer ces constantes sans modifier ni les équations ni le triangle de référence, c'est changer la figure en une figure homographique, ce qui est permis dans le problème qui nous occupe. Les constantes λ_1, λ_2, λ_3 étant arbitraires, la quantité $(\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)$ ne diffère que par la notation de celle que j'ai précédemment (6) appelée $F(x, y, z)$; par suite, au point a, cette quantité est infiniment petite de l'ordre h. Ainsi le premier facteur de A (11) est infiniment petit de l'ordre $2h$. Voyons maintenant le second facteur. Soit Ω le point (ξ, η, ζ) origine du système circulaire (Σ) qui correspond à (S), et α le point correspondant à a. Les coordonnées de α sont $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. Le second facteur de A ne diffère que par un facteur fini de la distance de α à la droite menée par Ω et le point dont les coordonnées sont X, Y, Z, c'est-à-dire à une droite arbitraire menée par Ω. L'ordre infinitésimal du second facteur de A est donc le même que celui de la distance $\Omega\alpha$. Je désigne cet ordre par σ. Donc l'ordre infinitésimal de A est $(\sigma + 2h)$. D'ailleurs Oa est, par hypothèse, infiniment petit de l'ordre n. Il en est donc de même de ds. Donc $\frac{A}{ds}$ est de l'ordre $(\sigma - n + 2h)$. En considérant successivement tous les points qui répondent aux solutions étrangères, on aura une somme $\Sigma(\sigma - n + 2h)$ de nombres analogues. Soit maintenant Γ la somme analogue pour la fonction Δ, le nombre des solutions étrangères est $\Gamma + \Sigma(\sigma - n + 2h)$. D'ailleurs le degré de B est égal à $(2q + m - 3)$; par suite, en désignant par γ la classe de la courbe Σ, j'ai

$$(14) \qquad k\gamma = (2q + m - 3)m - \Sigma(\sigma - n) - 2\Sigma h - \Gamma.$$

Dans cette équation, la somme Σh s'applique en premier lieu à tous les points pour lesquels on a déjà envisagé la même somme au numéro précédent, c'est-à-dire ceux en lesquels u, v, w s'évanouissent à la fois. Elle s'applique en second lieu à d'autres points; mais, en ces derniers, h est nul. Donc Σh a ici le même sens que précédemment; par suite, en vertu de (7), l'équation (14) se change en

$$(15) \qquad k(\gamma - 2\mu) = m(m - 3) - \Gamma - \Sigma(\sigma - n).$$

Pour obtenir la signification du nombre Γ, qui ne dépend que de la courbe S, il suffit de prendre un exemple particulier. Je fais

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z.$$

Alors la courbe Σ se confond avec S. Les nombres $(\sigma - n)$ sont nuls, et k est l'unité. On a alors d'après (15), en désignant par c la classe de S,

$$c = m(m - 1) - \Gamma.$$

L'égalité (15) peut alors s'écrire

$$(16) \qquad k(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n.$$

7. Je suppose maintenant que les courbes S et Σ se correspondent point par point. Le nombre k est alors égal à l'unité; mais, en outre, d'après le théorème II, σ se change en l'ordre de multiplicité ν du système circulaire (Σ) correspondant à (S). J'ai donc, au lieu de (16),

$$(17) \qquad \gamma - 2\mu + \Sigma\nu = c - 2m + \Sigma n.$$

Cette relation est entièrement symétrique par rapport aux éléments respectifs des deux courbes. Les systèmes circulaires (S) qui figurent dans Σn sont, d'après l'analyse ci-dessus : 1° ceux qui répondent à des points singuliers de S; soit T leur nombre et N la somme de leurs ordres de multiplicité; 2° ceux qui répondent à des points singuliers de Σ, dont les correspondants sur S sont des points simples. Leur nombre, que je désigne par N', est égal à la somme de leurs ordres de multiplicité, puisque tous ces ordres sont égaux à l'unité. Ainsi

$$\Sigma n = \mathrm{N} + \mathrm{N}'.$$

Soient $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ les nombres analogues pour Σ. On a

$$\Sigma \nu = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'.$$

Le nombre total t des couples de systèmes circulaires envisagés est

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{N}' = \mathfrak{T} + \mathfrak{N}'.$$

Par suite de ces trois relations, l'égalité (17) devient

$$(18) \qquad \gamma - 2\mu + \mathfrak{N} - \mathfrak{T} = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T},$$

ce qui démontre la proposition annoncée au début de ce travail.

8. Je n'ai pas à montrer ici par des applications l'utilité de cette proposition en Géométrie. J'en ai déjà fait usage en diverses occasions. Je me réserve de montrer une autre fois l'utilité du théorème II. Pour le moment, j'appellerai l'attention sur la relation (16), qui suppose simplement que la courbe Σ soit une transformée rationnelle de S, sans exiger la propriété réciproque. Je vais en faire une application.

Je suppose que S soit une courbe qui ne contienne que des branches simples, et que Σ soit une droite. Alors l'équation (16) se change en

$$(19) \qquad \lambda = c - 2m + 2k,$$

en désignant par λ la quantité $\Sigma(\sigma - n)$. Quelle est la signification de λ?

D'après l'hypothèse faite sur S, chaque nombre n est égal à l'unité; par suite, si O est un point de S, a un point de la même courbe, à distance infiniment petite du premier ordre de O; et si Ω, α sont les points correspondants sur la droite, que je désigne par D, le nombre σ est l'ordre de l'infiniment petit $\Omega\alpha$. Donc λ *est le nombre des points* Ω *qui sont stationnaires*. On peut encore en donner une autre interprétation, qui résulte du théorème I et de la remarque faite à la suite de ce théorème. Soient O un point de S,

Ω le correspondant sur D, et α un point de D infiniment voisin de Ω. Le nombre σ *est égal au nombre des points infiniment voisins de* O, *qui sur* S *correspondent à* α.

On peut, d'une infinité de manières, faire correspondre *un* point d'une droite D à un point d'une courbe quelconque S, et, par suite, tirer de l'égalité (19) beaucoup de résultats divers. Je vais donner un exemple. Je considère un système de courbes C de degré μ, défini par ces conditions : chaque courbe C passe par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés P, P_1, P_2, ..., et, en outre, a un contact d'ordre $(n-1)$ avec S. Soit L le point de contact d'une courbe C avec S : à ce point répond une seule courbe C du système. Je mène la tangente à C au point P; cette tangente rencontre une droite donnée D au point Λ. J'ai ainsi, par le couple (L, Λ), réalisé entre S et D la correspondance demandée. Je vais en tirer des conséquences. Je désigne par $\varphi(n)$ le nombre des courbes de degré μ que l'on peut mener par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, de manière que chacune de ces courbes ait, en outre, un contact d'ordre n avec S. Si je prends un point Λ à volonté, la tangente de C au point P se trouve déterminée. Le nombre des courbes C qui admettent, en P, cette tangente est précisément égal à $\varphi(n-1)$, si l'on veut toutefois admettre que, au lieu de deux points distincts, on peut donner un point et la tangente en ce point pour déterminer une courbe de degré μ, assujettie aux autres conditions indiquées, sans changer le nombre des solutions. Pour justifier cette supposition, il faudrait entrer dans quelques développements que j'omets ici. Le nombre des points L, qui correspondent à un point Λ, est égal au nombre des courbes C dont la tangente en P passe en Λ. Donc le nombre k est égal à $\varphi(n-1)$.

Je cherche maintenant λ. Le point Λ peut être stationnaire de deux manières différentes : 1° si la courbe C est stationnaire, c'est-à-dire si elle a un contact d'ordre n avec S. Le nombre des courbes C satisfaisant à cette condition est $\varphi(n)$; 2° si la tangente en P est stationnaire, sans que la courbe C le soit elle-même. Alors deux courbes C consécutives sont tangentes en P à la même droite. Une courbe quelconque du faisceau qu'elles déterminent a, au point L correspondant, un contact d'ordre $(n-2)$ avec S. Mais, parmi les courbes de ce faisceau, il en est une qui passe par un point arbitrairement donné. Donc le nombre des points A, qui sont stationnaires de cette seconde manière, est $\varphi(n-2)$. L'égalité (19) donne donc

$$\varphi(n)+\varphi(n-2)=c-2m+2\varphi(n-1).$$

On pourr a par là calculer $\varphi(n)$ si l'on connaît $\varphi(0)$. Or, par $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$ points, passe une courbe de degré μ. Elle coupe S en $m\mu$ points. Donc $\varphi(0)=m\mu$. En partant de cette valeur, on calculera de proche en proche $\varphi(1)$, $\varphi(2)$,..., et l'on obtiendra

$$(20) \qquad \varphi(n)=\frac{n(n+1)}{2}(c-2m)+(n+1)m\mu.$$

On remarquera que la démonstration ne s'applique pas au cas où n a sa valeur maxima, qui est $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$, cas dans lequel la formule (20) est cependant exacte encore.

La formule (20) donne *le nombre des courbes de degré* μ *qui passent par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2}-n$ *points donnés et ont avec une courbe donnée* S, *de degré* m *et de classe* c, *des contacts d'ordre* n, *sous la condition que la courbe* S *ne possède que des branches simples*. Dans le cas où S ne contient aucune singularité, la formule (20) a été donnée par M. de Jonquières [1]. Dans une autre occasion, j'en donnerai une démonstration très-différente et beaucoup plus complète. Je signalerai, en même temps, quelques cas où cette formule semble en défaut, et j'expliquerai les causes qui produisent cette circonstance; mais ici j'ai voulu simplement, par une application si importante, montrer le parti que l'on peut tirer de la formule (19).

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1860.