BULLETIN DE LA S. M. F.

ISSALY.

Sur une formule de Laguerre, étendue aux pseudo-surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 243-246
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__243_1>

SUR UNE FORMULE DE LAGUERRE, ÉTENDUE AUX PSEUDO-SURFACES;

Par M. l'abbé Issaly.

Étant donnée une courbe quelconque (S), tracée sur une pseudo-surface $\mathfrak{F}''$, et rapportée [1] à un système de coordonnées curvilignes (s) et (s'), dont les tangentes respectives, MX et MY, sont à angle *constant* Φ, si l'on désigne par ρ et τ les rayons de première et de deuxième courbure de cette ligne, par ϖ l'angle que son plan osculateur fait avec la normale MN ou MZ, élevée sur $\mathfrak{F}''$, on aura

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dS} - \operatorname{tang}\varpi\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{dS}\right) = \mathrm{H},$$

expression dans laquelle H désigne une fonction de l'angle formé par la tangente MT de (S) et l'axe MX, fonction que le calcul qui suit doit d'ailleurs nous faire connaître.

Pour établir cette formule, soient φ et φ' les angles que MT fait

---

[1] *Voir* (t. XVI et XVII de ce Recueil) les Mémoires intitulés :

I. *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites* (1888).
II. *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces* (1889).

avec les axes coordonnées MX, MY et tels, par conséquent, que l'on ait

$$(1)\qquad \varphi + \varphi' = \Phi = \text{const.}$$

De l'un ou de l'autre des triangles infinitésimaux $M\mu M'$ ou $M\mu' M'$, on tire

$$(2)\qquad \frac{ds}{\sin\varphi'} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi},$$

avec

$$dS^2 = ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds'\cos\Phi.$$

Soient, d'autre part, $\frac{1}{\rho'}$ la première courbure de *niveau* (courbure géodésique), $\frac{1}{\rho''}$ la première courbure de *profil* (courbure verticale) et $\frac{1}{\rho_0}$ la première courbure de *front* (*torsion!* géodésique) de (S). Aux notations près, qu'il nous paraît avantageux de modifier (I, n° 7), il viendra

$$(3)\qquad \frac{\sin\Phi}{\rho'} = \frac{d\varphi}{dS}\sin\Phi + (r\sin\varphi' + r'\sin\varphi),$$

$$(4)\qquad \frac{\sin\Phi}{\rho''} = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\sin\varphi - (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\sin\varphi',$$

$$(5)\qquad \frac{\sin\Phi}{\rho_0} = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos\varphi + (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos\varphi'.$$

A ces valeurs, il nous faut adjoindre les suivantes (I, n° 13), dont nous aurons bientôt à faire (partiellement) usage

$$(3')\qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{\sin\varpi}{\rho_\sigma} = -\frac{\sin\chi}{\rho_\upsilon} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon} + \frac{d\psi}{dS},$$

$$(4')\qquad \frac{1}{\rho''} = \frac{\cos\varpi}{\rho_\sigma} = -\frac{\cos\psi}{\rho_\varepsilon} = -\frac{1}{\tau_\upsilon} + \frac{d\chi}{dS},$$

$$(5')\qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos\chi}{\rho_\upsilon} = \frac{\sin\psi}{\rho_\varepsilon} = -\frac{1}{\tau_\sigma} + \frac{d\varpi}{dS},$$

Les courbures $\frac{1}{\rho_\sigma}$ $\left(\text{au lieu de } \frac{1}{\rho}, \text{ pour la symétrie}\right)$ $\frac{1}{\rho_\upsilon}$, $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ représentant les trois *déviations*, initiale, horizontale ou verticale de (S), que l'on sait, tout comme $\frac{1}{\tau_\sigma}$ $\left(\text{au lieu de } \frac{1}{\tau}\right)$, $\frac{1}{\tau_\upsilon}$, $\frac{1}{\tau_\varepsilon}$ en sont trois *flexions ou torsions correspondantes,* à savoir : celles de front, de profil ou de niveau.

Ceci posé, on remarquera que, puisque $\varphi' = \Phi - \varphi$, et que Φ est invariable, par hypothèse, les courbures *composantes* $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''}$, $\frac{1}{\rho_0}$, prises sous les formes (3), (4) et (5) sont des fonctions du seul angle φ, lesquelles dès lors conviennent à toutes les courbes de $\mathcal{F}''$ qui admettent en M la *même* tangente MT. Choisissons la deuxième de ces courbures. En la rapprochant de (4′), on aura

$$(6)\quad \sin\Phi\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\sin\varphi - (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\sin\varphi'.$$

Mais, des relations (2), où l'on regarde ds et ds' comme constants, on déduit

$$(7)\qquad \frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{ds\cos\varphi}{ds'\cos\varphi'} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi'},$$

et, par suite (à cause de $d\varphi' = -d\varphi$),

$$(7')\qquad \sin\varphi'\cos\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi'.$$

Si donc on différentie, par rapport à φ, l'expression (6), on trouvera

$$\sin\Phi\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = 2(p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos\varphi + 2(q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos\varphi',$$

c'est-à-dire (5)

$$(8)\qquad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = \frac{2}{\rho_0}.$$

Par un calcul en tout semblable on trouve encore

$$(8')\qquad \frac{d}{d\varphi'}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = -\frac{2}{\rho_0}.$$

De là, les identités suivantes, éminemment propres à notre objet :

$$(9)\quad \frac{d}{dS}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\frac{d\varphi}{dS} = \rho - \frac{d}{d\varphi'}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)\frac{d\varphi'}{dS} = \frac{2}{\rho_0}\,\frac{d\varphi}{dS}.$$

Que si, en effet, on rapproche d'elles la troisième des relations (5′), il viendra, après avoir développé le premier membre,

$$-\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d\varphi}{dS}\cos\varpi - \frac{1}{\rho}\,\frac{d\varpi}{dS}\sin\varpi = -2\left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{dS}\right)\frac{d\varphi}{dS}.$$

Éliminant $\frac{d\varphi}{dS}$, dont la valeur, tirée de (3) et de (3′), est

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\sin\varpi}{\rho} - \frac{r\sin\varphi' + r'\sin\varphi}{\sin\Phi},$$

divisant ensuite le tout par $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ ou $\frac{1}{\rho''}$, on arrive, après un dédoublement de termes facile à saisir, à la formule que voici

$$(10)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dS} - \operatorname{tang}\varpi\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{dS}\right) = 2\,\frac{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)}{\left(\frac{1}{\rho''}\right)}\,\frac{r\sin\varphi' + r'\sin\varphi}{\sin\Phi} = \mathrm{H}.$$

C'est précisément celle qu'il s'agissait d'établir.

Il convient d'observer que cette fonction de φ annoncée, H, peut aussi s'écrire

$$\mathrm{H} = -2\,\frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\Phi}\,(r\sin\varphi' + r'\sin\varphi),$$

l'angle ψ n'étant autre que celui que fait la tangente MT avec sa *représentation sphérique*.

Si, au lieu de supposer Φ constant, comme nous l'avons fait, dès le début, nous le supposons variable, les relations (7) se conserveront, sans doute; mais, à l'encontre de (8) et de (8′), on trouvera

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\sin\Phi\right) &= \frac{2}{\rho_0}\sin\Phi - 2\,\frac{d\Phi}{d\varphi'}(q\sin\varphi' - q'\sin\varphi)\cos\varphi',\\ \frac{d}{d\varphi'}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\sin\Phi\right) &= -\frac{2}{\rho_0}\sin\Phi + 2\,\frac{d\Phi}{d\varphi}(p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos\varphi.\end{aligned}\right.$$

Or, on ne saurait faire sortir d'un tel système les identités (9) et, partant, l'artifice de calcul qui, seul, a pu nous conduire au résultat devient totalement impossible.

Ajoutons, pour terminer, que tout ce qui précède devient (à titre de cas particulier seulement) applicable aux courbes tracées sur les *surfaces*, mais à condition qu'on introduira, tacitement du moins, dans toutes les formules mises en jeu ci-dessus, la condition caractéristique $p = -q'$, et que, en outre, au lieu de considérer les arcs comme indépendants et, par suite, comme des constantes, dans la différentiation, on traitera $d\mathrm{S}$ d'abord, puis ρ aussi, par voie de conséquence, ds et ds', comme des fonctions données de deux variables arbitraires, telles que u et u'.