BULLETIN DE LA S. M. F.

F. DUMONT

Théorème sur les surfaces cubiques analogues au théorème de Chasles sur les cubiques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 235-239

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__235_1>

THÉORÈMES SUR LES SURFACES CUBIQUES ANALOGUES AU THÉORÈME DE CHASLES SUR LES CUBIQUES PLANES;

Par M. F. Dumont.

Si l'on cherche, pour les surfaces cubiques un théorème analogue du théorème de Chasles pour les cubiques planes, on voit d'abord qu'une analogie complète ne peut exister, c'est-à-dire qu'une surface cubique quelconque ne peut, en général, être la transformation homologique d'une surface cubique à centre de symétrie. En effet, soient S la surface, M l'un de ses points, Q la quadrique polaire de M, tangente, comme on sait, à S en M; d une droite passant par M; B le point (d, Q) autre que M; A_1 et A_2 les points (d, S) autres que M. Comme dans le cas des cubiques planes, B est conjugué harmonique de M par rapport au couple A_1, A_2. Si donc il existait un point M_0 de S, dont la quadrique polaire fût décomposée en deux plans, il suffirait de transformer homologiquement, ce point étant le centre, de façon que celui de ces deux plans qui n'est pas le plan tangent en M_0 passe à l'infini, pour obtenir une surface à centre.

Mais un tel point n'existe pas, en général; les quadriques polaires des points de la hessienne H n'ont subi qu'une première dégénérescence en cône, et les dix points de H, pour lesquels la dégénérescence en deux plans a lieu, ne sont pas, en général, sur la surface.

Ainsi, l'on ne peut trouver qu'un théorème partiellement analogue au théorème de Chasles. Mais il arrive alors, ce qui est le cas le plus fréquent dans le transport aux figures de l'espace des propriétés des figures planes, qu'il y a plusieurs théorèmes analogues.

Premier théorème. — *Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant un cône asymptote.*

Prenons pour centre d'homologie l'un D_1 des dix points doubles de la hessienne H, et projetons de façon que l'un des deux plans P_1, P_2, constituant sa quadrique polaire par rapport à la surface S, passe à l'infini; les plans tangents à S, le long des courbes (S, P_1), (S, P_2) passant tous par D_1; d'après la propriété connue de la quadrique polaire, on voit que les plans tangents à la surface transformée, le long de la cubique d'intersection par le plan de l'infini, au lieu d'envelopper une développable de sixième classe, comme cela a lieu, en général, enveloppent un cône de sommet D_1 qui constitue ainsi un cône asymptote de la surface.

Cette transformation fait disparaître, de l'équation de la surface (l'origine étant en D_1), tous les termes du second degré et donne à cette équation la forme

$$f_3 + f_1 + K = 0,$$

f_3, f_1 étant des fonctions homogènes de degrés 3 et 1, K étant une constante. Or, la quadrique polaire de l'origine se composant du plan de l'infini et du plan $f_1 + 3K = 0$, si l'on prend le plan de coordonnée yD_1z parallèle à ce dernier, la fonction f_1 se réduit au terme en x. L'équation n'a plus alors que douze termes ou onze paramètres.

Si, de plus, dans le plan yOz on prend l'un des axes, par exemple Oy (ou $z = 0$), parallèle à l'une des directions asymptotiques réelles de la section par ce plan yOz, le terme en y^3 disparaît; et si le second axe est conjugué harmonique du premier, par rapport aux deux autres directions asymptotiques de la section, le terme en yz^2 disparaît aussi. Enfin, si l'on choisit l'axe $D_1 x(y = z = 0)$ de façon qu'il passe par un point de la courbe d'intersection du plan de l'infini avec la surface, le terme en x^3 disparaît à son tour, et l'équation est réduite à la forme à huit paramètres

$$\begin{aligned} Az^2 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + 3Dx^2z + 3Exz^2 + 3Fy^2z \\ + 6Gxyz + 3Hx + K = 0. \end{aligned}$$

L'analogie entre ces surfaces et les cubiques planes à centre consiste en ce que, pour ces dernières, les trois asymptotes sont concourantes.

On voit, de plus, qu'il suffirait d'annuler, dans cette équation, le seul coefficient K pour obtenir une surface à centre de symétrie.

Deuxième théorème. — *Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant deux sections planes à centres de symétrie, le centre étant le même pour les deux sections.*

Soit M un point d'intersection de la surface S et de la hessienne H, c'est-à-dire un point de la courbe parabolique; la quadrique polaire Q de M est un cône tangent à S au point M; soit A son sommet et considérons deux génératrices AB, AC de ce cône; toute droite Mx, menée par M dans l'un des plans MAB, MAC, coupe la surface en deux points autres que M, qui forment avec M et le point (Mx, AB) ou le point (Mx, AC) une division harmonique.

Donc si, M étant le centre, on transforme homologiquement la figure de façon que le plan ABC passe à l'infini, la surface transformée sera telle que les sections par les plans MAB et MAC auront le point M pour centre de symétrie.

Si donc nous prenons MAB et MAC pour plans de coordonnées xOy et xOz, les termes en x^2, y^2, z^2, xy, xz disparaîtront de l'équation ainsi que le terme indépendant. De plus, l'arête MA du cône rencontre la surface en trois points confondus en M et, par suite, le terme en x doit aussi faire défaut.

L'équation est actuellement réduite à

$$A_1 x^3 + A_2 y^3 + A_3 z^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + 3B_3 x^2 z + 3B_4 xz^2 + 3B_5 y^2 z + 3B_6 yz^2 + 6D xyz + 6E yz + 3F_1 y + 3F_2 z = 0.$$

Considérons la section $y = 0$, elle a au moins une direction asymptotique réelle; prenons-la pour axe des z; il faut alors que $A_3 = 0$. De même, en prenant pour axe des y une direction asymptotique réelle de la section $z = 0$, on a $A_2 = 0$. L'équation est alors réduite à la forme à dix paramètres

$$A x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + 3B_3 x^2 z + 3B_4 xz^2 + 3B_5 y^2 z + 3B_6 yz^2 + 6D xyz + 6E yz + 3F_1 y + 3F_2 z = 0.$$

On voit qu'il suffit, ici encore, d'annuler un seul paramètre qui est E, pour que la surface ait un centre de symétrie. On voit, de plus, que Oy et Oz sont non seulement parallèles à deux directions asymptotiques, mais sont des asymptotes.

Troisième théorème. — *Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant trois sections parallèles, à centre de symétrie, les trois centres étant en ligne droite.*

On sait que les plans polaires des points d'une droite enveloppent, en général, un cône du second ordre dit *cône polaire de la droite,* qu'il existe une congruence de droites pour lesquelles ce cône est réduit à une droite dite *droite polaire.*

Soit d une droite possédant une droite polaire et soit δ cette dernière; les plans polaires des points de d passant tous par δ, les quadriques polaires de tous les points de δ passent par la droite d. Soit O un point d'intersection réel de δ et de la surface cubique S. La quadrique polaire de O, comme toutes celles des points de δ, passe par d, mais, en outre, elle est tangente à S au point O. Toute droite menée par O coupe la quadrique polaire en un second point, conjugué harmonique de O par rapport aux deux points, autres que O, où cette droite coupe S. Projetons homologiquement, O étant centre, de façon que d soit portée à l'infini, la section par le plan (O, d) devient une cubique à centre. Or, il en sera de même des sections par les plans transformés de (O', d) et de (O'', d), O' et O'' étant les autres points (δ, S), car les quadriques polaires de ces points contiennent d.

Par suite, si l'on prend O pour origine, (O, d) pour plan xOy; si, de plus, on a projeté à l'infini, non seulement d, mais aussi le point de δ qui est conjugué harmonique de O, par rapport à O' et O'', de telle sorte que, dans la figure transformée, O devienne le milieu de la distance des deux autres points, l'équation se réduit à

$$\begin{aligned}A_1 x^3 + A_2 y^3 + A_3 z^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + 3B_3 xz^2 + 3B_4 yz^2 \\ + 6D_1 xz + 6D_2 yz + 3E_1 x + 3E_2 y - A_3 h^2 z = 0,\end{aligned}$$

h étant la distance de O aux deux autres points (δ, S) dans la figure transformée. Si maintenant l'on prend Oy parallèle à une direction asymptotique réelle de xOy (c'est-à-dire coïncidant avec une asymptote) et Oy, conjugué harmonique de Oy relativement aux deux autres directions asymptotiques de cette section, l'équation se réduit à la forme à neuf paramètres

$$\begin{aligned}A_1 x^3 + A_3 z^3 + 3B_2 xy^2 + 3B_3 xz^2 + 3B_4 yz^2 \\ + 6D_1 xz + 6D_2 yz + 3E_1 x + 3E_2 y + Fx = 0.\end{aligned}$$

Si, dans le raisonnement conduisant au théorème 2, on suppose que les génératrices AB et AC sont infiniment voisines, on arrive, en effectuant les modifications convenables, à un autre théorème analogue.

Enfin, si l'on projette à l'infini la génératrice du cône AM en plaçant le centre de projection en un point de ce cône, on peut obtenir aussi un théorème présentant une analogie partielle avec le théorème de Newton sur la perspective des cubiques planes.