BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Sur les fonctions elliptiques du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 212-221

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__212_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE;

Par M. Raoul Bricard.

I.

On sait que deux fonctions elliptiques du second ordre d'un même argument et possédant le même réseau de périodes sont reliées par une équation *doublement quadratique,* c'est-à-dire du second ordre par rapport à chacune d'elles. Réciproquement toute équation doublement quadratique peut être considérée comme étant la relation entre deux fonctions elliptiques du second ordre, convenablement choisie.

Un Chapitre important de l'Ouvrage classique d'Halphen ([1]) est consacré en grande partie à l'étude de cette relation.

Dans cette Note, je me propose d'établir un théorème concernant le système de trois fonctions elliptiques d'un même argument et possédant les mêmes périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Je supposerai, ce qui est le cas général et le plus intéressant, que les sommes des pôles sont des quantités distinctes pour chacune de ces trois fonctions. Les cas particuliers donnent d'ailleurs lieu à une étude facile.

II.

Soient

$$t = f(z), \qquad u = \varphi(z), \qquad v = \psi(z)$$

les trois fonctions considérées. Elles sont reliées par trois équations doublement quadratiques

$$F(t,u) = X u^2 + 2Y u + Z = 0, \tag{1}$$

$$F_1(t,v) = X_1 v^2 + 2Y_1 v + Z_1 = 0, \tag{2}$$

$$F_2(u,v) = X_2 v^2 + 2Y_2 v + Z_2 = 0, \tag{3}$$

où X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 sont des polynômes du second degré en t, X_2, Y_2, Z_2, des polynômes du second degré en u. D'après les hy-

([1]) *Traité des fonctions elliptiques*, Tome II, Chap. IX.

pothèses faites, on sait que ces trois équations sont irréductibles [1].

Les équations (1) et (2), résolues par rapport à u et v, donnent

$$u = \frac{-Y \pm \sqrt{P}}{X}, \qquad v = \frac{-Y_1 \pm \sqrt{P_1}}{X_1},$$

en posant

$$P = Y^2 - XZ, \qquad P_1 = Y_1^2 - X_1 Z_1.$$

Il est aisé de voir que les polynômes en t du quatrième degré, P et P_1, sont identiques à un facteur constant près.

En effet, les racines des équations

$$P = 0, \qquad P_1 = 0$$

sont les valeurs de t auxquelles correspondent respectivement deux valeurs égales de u et deux valeurs égales de v. Or, désignons par a, b, c les sommes des pôles (ou des zéros, à une période près), respectivement pour les fonctions t, u, v. A une valeur de la fonction t correspondent en général deux valeurs de l'argument, dont la somme, comme on sait, est égale à a et qu'on peut désigner par z et $a - z$. Les valeurs correspondantes de la fonction u sont $\varphi(z)$ et $\varphi(a - z)$.

Pour que ces valeurs soient égales, il faut qu'on ait, soit

$$z + a - z = a = b,$$

ce qui n'a pas lieu, soit

$$z - (a - z) = 2z - a = \text{période},$$

d'où

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,\text{période}.$$

Aussi les quatre valeurs de t, auxquelles correspondent des valeurs égales de u, sont

$$f\left(\frac{a}{2}\right), \quad f\left(\frac{a}{2} + \omega_1\right), \quad f\left(\frac{a}{2} + \omega_2\right), \quad f\left(\frac{a}{2} + \omega_3\right)$$

(en posant comme d'habitude $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$).

---

(1) *Voir* Halphen, *loc. cit.*

Ces valeurs de t sont aussi celles pour lesquelles l'équation (3), en v, acquiert des racines égales.

Les polynômes P et P_1 ont donc les mêmes racines et sont bien identiques à un facteur constant près. On peut évidemment supposer que ce facteur est égal à l'unité. On a donc l'identité

$$P = Y^2 - XZ = Y_1^2 - X_1 Z_1 = P_1. \tag{4}$$

Une remarque est encore importante : pour une valeur quelconque de t, les équations (2) et (3), en v, n'ont qu'une racine commune.

En effet, soit toujours z l'une des valeurs de l'argument correspondant à la valeur t de la première fonction ; la seconde fonction a deux valeurs correspondant à t ; supposons que l'on ait choisi l'une de ces valeurs, par exemple

$$u = \varphi(z).$$

Les deux racines de l'équation (2) sont alors $\psi(z)$ et $\psi(a-z)$; celles de l'équation (3) sont $\psi(z)$ et $\psi(b-z)$. Or on n'a pas

$$\varphi(a-z) = \psi(b-z),$$

car cette égalité entraînerait, soit

$$a = b + \text{période},$$

ce qui n'est pas, soit

$$a + b - 2z = c,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toute valeur de z.

On voit ainsi que, si pour une valeur de t on a choisi l'une des deux valeurs de u, la valeur de v est bien déterminée. Cela revient à dire que le choix du signe devant le radical $\sqrt{P}$, dans l'expression de u, entraîne l'obligation de prendre le même radical avec un signe déterminé dans la valeur de v. On peut supposer, par exemple, que le signe + est pris devant les deux radicaux. On a ainsi

$$u = \frac{-Y + \sqrt{P}}{X}, \qquad v = \frac{-Y_1 + \sqrt{P}}{X_1}.$$

De ces égalités, je vais tirer deux relations entre t, u, v, à forme rationnelle.

La première s'obtient immédiatement en éliminant $\sqrt{P}$ entre les deux égalités. Il vient

$$(5)\qquad Xu - X_1 v + Y - Y_1 = 0.$$

Pour obtenir la seconde, écrivons d'abord les valeurs de $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$:

$$\frac{1}{u} = \frac{X}{-Y+\sqrt{P}} = \frac{X(-Y-\sqrt{P})}{Y^2-P} = \frac{-Y-\sqrt{P}}{Z},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{-Y_1-\sqrt{P}}{Z_1},$$

et, par élimination de $\sqrt{P}$, il vient

$$\frac{Z}{u} + Y = \frac{Z_1}{v} + Y_1$$

ou

$$(6)\qquad (Y - Y_1)uv - Z_1 u + Zv = 0.$$

(5) et (6) sont les deux relations indiquées; mais on peut en tirer d'autres, d'une forme plus intéressante.

Ajoutons en effet ces deux relations, après avoir multiplié la première par un facteur numérique λ; nous obtenons

$$(7)\qquad (Y - Y_1)uv + (\lambda X - Z_1)u + (Z - \lambda X_1)v + Y - Y_1 = 0.$$

L'équation en t

$$Y - Y_1 = 0$$

a deux racines a et b qui sont distinctes *en général*. On a donc

$$Y - Y_1 = K_1(t-a)(t-b).$$

Le facteur numérique λ a été laissé indéterminé jusqu'ici.

Déterminons-le de manière que le polynôme $\lambda X - Z_1$ admette la racine a. Il faut pour cela que l'on ait

$$\lambda = \frac{Z_1(a)}{X(a)},$$

en désignant par $X(a)$ ce que devient le polynôme X quand on y remplace t par a, etc.

Mais, en faisant $t = a$, dans la relation (4), il vient

$$X(a)Z(a) = X_1(a)Z_1(a),$$

d'où

$$\lambda = \frac{Z_1(a)}{X(a)} = \frac{Z(a)}{X_1(a)},$$

ce qui prouve que, pour la valeur choisie de λ, le polynôme $Z - \lambda X_1$ est divisible par $t - a$. On peut donc poser

$$\lambda X - Z_1 = K_2(t-a)(t-c),$$
$$Z - \lambda X_1 = K_3(t-a)(t-d)$$

et la relation (7) devient

$$K_1(t-a)(t-b)uv + K_2(t-a)(t-c)u$$
$$+ K_3(t-a)(t-d)v + K_1(t-a)(t-b) = 0,$$

et, en divisant par le facteur non identiquement nul $t - a$:

$$(8) \qquad K_1(t-b)uv + K_2(t-c)u + K_3(t-d)v + K_1(t-b) = 0.$$

De même, en faisant

$$\lambda = \frac{Z_1(b)}{X(b)},$$

on obtient la relation

$$(9) \qquad K_1(t-a)uv + K'_2(t-c')u + K'_3(t-d')v + K_1(t-a) = 0.$$

Les relations (8) et (9) sont distinctes, comme cela résulte immédiatement de la comparaison de leurs premiers termes. Elles sont toutes deux linéaires par rapport à chacune des variables qu'elles renferment. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Trois fonctions elliptiques du second ordre du même argument, t, u, v ayant les mêmes périodes et telles que pour chacune les sommes des pôles soient des quantités différentes, satisfont à deux relations distinctes, linéaires par rapport à chacune d'elles :

$$A\,tuv + B\,uv + C\,vt + D\,tu + E\,t + F\,u + G = 0,$$
$$A'\,tuv + B'\,uv + C'\,vt + D'\,tu + E'\,t + F'\,u + G' = 0.$$

On peut naturellement substituer une combinaison linéaire des deux équations précédentes à l'une d'entre elles. En particulier, on peut ainsi faire disparaître le terme en tuv.

Enfin, si l'on considère t, u, v comme des coordonnées courantes, le théorème obtenu s'interprète géométriquement ainsi qu'il suit :

La sextique gauche de genre un dont les points ont pour coördonnées des fonctions elliptiques du second ordre, aux mêmes périodes, d'un argument variable, est située sur une infinité de surfaces du troisième ordre et en particulier sur une quadrique (nécessairement unique).

Ces conclusions sont établies dans le cas où le polynôme $Y - Y_1$ n'est pas carré parfait. Dans le cas contraire, les relations (8) et (9) se confondent, et la méthode employée ne conduit, par conséquent, qu'à une seule relation entre t, u, v, linéaire par rapport à ces fonctions. Pour en obtenir une seconde, nous éliminerons le radical $\sqrt{P}$ entre les inégalités qui donnent u et $\frac{1}{v}$, d'une part, v et $\frac{1}{u}$ de l'autre. On trouve ainsi les relations

$$X\,uv + (Y + Y_1)v + Z_1 = 0, \tag{10}$$

$$X_1 uv + (Y + Y_1)u + Z = 0, \tag{11}$$

d'où, en désignant par μ un facteur numérique quelconque,

$$(X + \mu X_1)uv + (Y + Y_1)(v + \mu u) + Z_1 + \mu Z = 0. \tag{12}$$

En prenant μ de manière que le polynôme $X + \mu X_1$ admette l'une des racines du polynôme $Y + Y_1$, on verra, comme précédemment, que le polynôme $Z_1 + \mu Z$ admet également cette racine. On peut encore supprimer le facteur, linéaire en t, qui apparaît alors, et l'on est conduit à une nouvelle relation entre t, u, v, linéaire par rapport à chacune de ces quantités.

Si le polynôme $Y + Y_1$ a ses racines inégales, les deux relations obtenues sont distinctes et peuvent remplacer les relations (9) et (10).

Si le polynôme $Y + Y_1$ a ses racines égales, on n'obtient qu'une nouvelle relation. Si cette relation est distincte de la relation (9), le but cherché est encore atteint. Il faut encore examiner le cas où cette relation se confondrait, elle aussi, avec la relation (9).

S'il en est ainsi, on a

$$\begin{aligned} Y - Y_1 &= K_1(t-a)^2, & Y + Y_1 &= K'_1(t-a')^2, \\ \lambda X - Z_1 &= K_2(t-a)(t-c), & X + \mu X_1 &= K'_2(t-a')(t-c'), \\ Z - \lambda X_1 &= K_3(t-a)(t-d), & Z_1 + \mu Z &= K'_3(t-a')(t-d'), \end{aligned}$$

et, les deux relations formées comme on a vu, sont

$$K_1(t-a)uv + K_2(t-c)u + K_3(t-d)v + K_1(t-a) = 0,$$
$$K'_2(t-c')uv + K'_1(t-a')(\mu u + v) + K'_3(t-d') = 0.$$

Comme elles sont identiques, on a nécessairement

$$c' = d' = a, \qquad c = d = a'.$$

On voit que les quatre polynômes $\lambda X - Z_1$, $Z - \lambda X_1$, $X + \mu X_1$, $Z_1 + \mu Z$ sont identiques, à des facteurs constants près, au produit $(t-a)(t-a')$. Il en est, par suite, de même des polynômes X, Z, X_1, Z_1, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} X &= A(t-a)(t-a'), & X_1 &= A_1(t-a)(t-a'), \\ Z &= B(t-a)(t-a'), & Z_1 &= B_1(t-a)(t-a'). \end{aligned}$$

En remplaçant, dans les relations (5) et (6) les polynômes qui y figurent par leurs expressions, il vient, après suppression de facteurs non identiquement nuls,

$$A(t-a')u - A_1(t-a')v + K_1(t-a) = 0,$$
$$K_1(t-a)uv - B_1(t-a')u + B(t-a')v = 0,$$

relations qui, cette fois, sont nécessairement distinctes.

Le théorème énoncé plus haut est donc général.

III.

L'étude qui vient d'être faite peut être envisagée à un point de vue purement algébrique. En effet, les trois équations (1), (2), (3) constituent un système qui admet une infinité de solutions en t, u, v. Réciproquement, posons-nous ce problème :

Étant donné le système (1), (2), (3), *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il admette une infinité de solutions.*

Pour éviter les longueurs qui résulteraient des examens des cas particuliers, je suppose que les trois équations sont *irréductibles et de genre un*. Voici alors comment on peut raisonner.

Les équations en v (2) et (3) ont constamment, soit une, soit deux racines communes.

Dans le premier cas, cette racine est fonction rationnelle des coefficients des deux équations, par suite de t et de u. Donc, en adoptant les notations déjà employées et en désignant par $R(x, y)$ une fonction rationnelle des variables x et y,

$$\frac{-Y_1 \pm \sqrt{P_1}}{X_1} = R\left(t, \frac{-Y \pm \sqrt{P}}{X}\right).$$

Cette relation, où la variable t figure seule, doit avoir lieu identiquement. On la met aisément sous la forme

$$M\sqrt{P} + N\sqrt{P_1} + Q = 0,$$

M, N, Q étant des polynômes en t. En faisant passer dans le second membre le polynôme Q, et en élevant au carré, il vient

$$\sqrt{PP_1} = \text{fonction rationnelle de } t.$$

Ainsi PP_1 doit être le carré d'une fonction rationnelle et par suite d'un polynôme en t.

Or les polynômes P et P_1 ne peuvent avoir de facteurs carrés, car si l'on avait, par exemple,

$$P = (t-\alpha)^2(At^2 + Bt + C),$$
$$u = \frac{-Y \pm (t-\alpha)\sqrt{At^2 + Bt + C}}{X},$$

on pourrait exprimer à la fois t et u en fonctions rationnelles d'un paramètre, et la relation entre ces deux variables serait de genre zéro, contrairement à l'hypothèse.

Il faut donc, puisque le polynôme PP_1 est carré parfait, que les facteurs linéaires de P et de P_1 soient identiques; en d'autres termes, P et P_1 sont identiques à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à l'unité.

Le raisonnement s'achève alors comme on l'a vu.

Il reste à examiner le cas où les équations (2) et (3) ont constamment leurs deux racines en v communes. On a alors

$$X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0,$$
$$X_1 Z_2 - Z_1 X_2 = 0,$$

c'est-à-dire deux relations doublement quadratiques entre t, u, qui doivent être identiques à la relation (1), puisque cette dernière est supposée irréductible.

Pour trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les polynômes X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, ajoutons membre à membre les relations précédentes, après avoir multiplié la seconde par un facteur numérique λ. Il vient

$$(Y_2 + \lambda Z_2) X_1 - (Y_1 + \lambda Z_1) X_2 = 0.$$

Déterminons le nombre λ de manière que le polynôme $Y_2 + \lambda Z_2$ admette l'un des facteurs de X_2. Il faut qu'en même temps les deux autres facteurs des deux polynômes soient identiques. En effet, s'il en est autrement, on aura formé une équation de la forme

$$(A u + B) X_1 - (Y_1 + \lambda Z_1)(C u + D) = 0,$$

qui est inadmissible, puisqu'elle ne renferme u qu'au premier degré et par suite est de genre zéro. Il en résulte que les polynômes $Y_2 + \lambda Z_2$ et X_2 sont identiques à un facteur constant près. On a donc l'identité

$$Z_2 = k X_2 + l Y_2,$$

d'où

$$Z_1 = k X_1 + l Y_1.$$

On peut résumer ainsi les résultats obtenus :

Pour que le système (1), (2), (3), *dans l'hypothèse générale où nous sommes placés, admette une infinité de solutions en* t, u, v, *il faut et il suffit*,

ou bien que ce système résulte de l'élimination successive des variables t, u, v, *entre les deux relations*

$$A\, tuv + B\, uv + C\, vt + D\, tu + E\, t + F\, u + G\, v + H = 0,$$
$$A'\, tuv + B'\, uv + C'\, vt + D'\, tu + E'\, t + F'\, u + G'\, v + H' = 0,$$

ou bien qu'il soit de la forme suivante :

$$f(t, u) = X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0,$$
$$\varphi(t, v) = X_1 v^2 + Y_1 v + k X_1 + l Y_1 = 0,$$
$$\psi(u, v) = X_2 v^2 + Y_1 v + k X_2 + l Y_2 = 0,$$

en désignant par X_1, Y_1 *des polynômes du second degré en* t, *par* X_2, Y_2 *des polynômes du second degré en* u, *par* k *et* l *des nombres quelconques.*

Il est bon de remarquer que, dans le second cas, les variables t, u, v ne peuvent plus s'exprimer en fonctions elliptiques d'un argument, alors que cela a lieu dans le premier cas.