Bulletin de la S. M. F.

L. Raffy

Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 147-172

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__147_0>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE SONT LIÉS PAR UNE RELATION;

Par M. L. RAFFY.

Les pages qui suivent ont pour objet d'élucider une question difficile, qui a été formulée incidemment, il y a trente ans, par Ossian Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XLII) et qui n'a pas, que je sache, été résolue depuis : *Déterminer toutes les surfaces qui jouissent des deux propriétés suivantes : 1° leurs rayons de courbure principaux sont liés par une relation; 2° les lignes le long desquelles leur courbure totale est constante sont géodésiquement équidistantes.* Il s'agit, en d'autres termes, de *déterminer toutes les surfaces à lignes d'égale courbure parallèles, dont les rayons principaux sont fonctions l'un de l'autre.*

Il est évident que la classe ainsi définie comprend toutes les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation et qui sont applicables sur des surfaces de révolution. Mais ces surfaces, que j'ai étudiées précédemment (*Bull. de la Soc. mathém. de France,* t. XIX, p. 158) et qu'Ossian Bonnet avait déjà rencontrées (Mémoire précité) en s'occupant des déformations qui conservent les courbures principales, sont-elles les seules qui répondent à la question? Rien n'est moins évident. Il en est pourtant ainsi, et nous arriverons, comme conclusion du présent travail, à ce théorème : *Toute surface, à lignes d'égale courbure parallèles, dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation, est applicable sur une surface de révolution.*

1. Au cours de notre analyse, nous aurons à invoquer certaines propositions que nous détacherons ici, pour plus de netteté.

LEMME I. — *Si une surface a ses lignes d'égale courbure parallèles, son élément linéaire est réductible à la forme*

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U - V)^2}{U'}\,dv^2, \tag{1}$$

où V *désigne une fonction de* v *seulement,* U *une fonction de* u *seulement,* U′ *sa dérivée par rapport à* u; *les courbes* $v =$ const. *sont les géodésiques, trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure* ($u =$ const.).

Ce résultat étant bien connu, nous n'y insisterons pas.

Lemme II. — *Pour que l'élément linéaire* (1) *convienne à une surface à une courbure totale constante, il faut et il suffit que* U′ *soit un trinôme du second degré en* U, *à coefficients constants.*

On sait, en effet, que, quand l'élément linéaire d'une surface est mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

le produit des courbures principales de cette surface est donné par la formule de Gauss

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d^2\sqrt{G}}{du^2}.$$

Appliquée à l'élément linéaire (1) cette relation devient

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\sqrt{U'}\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sqrt{U'}}. \tag{2}$$

Si maintenant on pose $U' = \psi(U)$ et qu'on prenne U pour variable indépendante, il viendra

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{2\psi\psi'' - \psi'^2}{4}, \tag{3}$$

les accents désignant les dérivées prises par rapport à U. Enfin, si l'on égale la courbure totale à une constante $2c$, et qu'on intègre l'équation

$$2\psi\psi'' - \psi'^2 = 4c,$$

on trouvera, avec deux constantes arbitraires a et b,

$$a\psi = (aU + b)^2 + c,$$

ce qui démontre le résultat annoncé. Si $c = 0$, c'est-à-dire si ψ est un carré parfait, les surfaces seront des développables.

Lemme III. — *Pour que l'élément linéaire* (1) *convienne à une surface à courbure totale variable, applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit que la fonction* V *se réduise à une constante.*

En effet, pour qu'une surface, à courbure totale variable φ, soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit, comme on sait, que les deux premiers paramètres différentiels de φ soient des fonctions de φ seulement.

La première condition $\Delta\varphi = f(\varphi)$, exprimant que les lignes d'égale courbure sont parallèles, est vérifiée d'elle-même pour l'élément linéaire (1). Le second paramètre différentiel d'une fonction φ, relativement à l'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

a pour expression générale

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right).$$

Dans le cas de l'élément linéaire (1) on a

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \mathrm{F} = 0, \qquad \mathrm{G} = \frac{(\mathrm{U}-\mathrm{V})^2}{\mathrm{U}'}, \qquad \mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \sqrt{\mathrm{G}};$$

de plus la fonction φ ne dépend que de u; il vient donc

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}}\frac{d\varphi}{du}\right) = \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{\mathrm{G}'_u}{2\mathrm{G}}\frac{d\varphi}{uu}.$$

Pour que $\Delta_2\varphi$ soit une fonction de φ, c'est-à-dire ne dépende que de u, il faut et il suffit visiblement qu'il en soit ainsi de l'expression

$$\frac{\mathrm{G}'_u}{\mathrm{G}} = \frac{2\mathrm{U}'}{\mathrm{U}-\mathrm{V}} - \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'},$$

ce qui ne peut être que si V se réduit à une constante.

2. Ces préliminaires une fois posés, nous prendrons pour point de départ des relations que j'ai antérieurement déduites (*Bull. de la Soc. mathém. de France,* t. XX, p. 47) des formules fondamentales de la théorie des surfaces. Soit, en coordonnées curvilignes rectangulaires,

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

l'élément linéaire d'une surface; soient R_1 et R_2 ses rayons de courbure principaux au point (u, v); si l'on pose

$$2h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad 2S = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2},$$

et qu'on désigne par ω le double de l'angle que fait avec l'arc $\sqrt{G}\,dv$ la ligne de courbure de rayon R_1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial u} &= \sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\cos\omega}{S}\,\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\sin\omega}{S}\,\frac{\partial h}{\partial u} - \sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\partial}{\partial v}\log ES,\\
\frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\cos\omega}{S}\,\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\sin\omega}{S}\,\frac{\partial h}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\partial}{\partial u}\log GS.
\end{aligned}$$

On démontre qu'à tout système de fonctions E, G, h, S, ω, vérifiant ces relations, ainsi que la condition

$$h^2 = S^2 + \frac{1}{R_1 R_2},$$

correspond une surface entièrement déterminée de forme, à une symétrie près.

Dans ces formules générales faisons

$$E = 1, \qquad G = \frac{(U - V)^2}{U'}$$

pour exprimer (Lemme I) que les lignes d'égale courbure sont parallèles.

Nous supposons, en outre, que les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre. Or leur produit ne dépend ici que de u, en vertu de la formule (2) établie plus haut

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\sqrt{U'}\,\frac{d^2}{du^2}\,\frac{1}{\sqrt{U'}}.$$

Par suite nous devons désormais considérer R_1 et R_2, ou bien h et S, comme des fonctions de la seule variable u (ce qui n'exclut que des surfaces à courbure totale constante, mais non toutes ces surfaces). Le problème que nous nous proposons revient donc à celui-ci : *Résoudre les équations simultanées*

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\sin\omega}{S}\frac{dh}{du}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{U-V}{\sqrt{U'}}\left[\frac{\cos\omega}{S}\frac{dh}{du} + \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{(U-V)^2 S}{U'}\right], \tag{5}$$

$$h^2 = S^2 - \sqrt{U'}\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{\sqrt{U'}}, \tag{6}$$

en prenant pour h et S *des fonctions de la seule variable u.*

3. L'équation (4) s'intègre immédiatement et donne, avec une fonction arbitraire W de la variable v,

$$\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \log W + \int\frac{dh}{S}.$$

Posons pour abréger

$$\frac{dU_0}{U_0} = -\frac{dh}{S}. \tag{7}$$

Nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{W}{U_0}, \tag{4$'$}$$

et nous devrons supposer que W ne se réduit pas à une constante, sans quoi l'angle ω ne dépendant que de u, l'angle des lignes de courbure avec chaque ligne d'égale courbure ($u =$ const.) serait constant tout le long de cette ligne. Or Ossian Bonnet a énoncé ce théorème : *Toute surface, dont les rayons principaux sont liés par une relation et dont les lignes de courbure font avec chaque ligne d'égale courbure un angle constant tout le long de cette ligne, est un hélicoïde* [1]. Par suite la surface serait applicable sur une surface de révolution.

De la formule (4)′ on déduit

$$\cos\omega = \frac{U_0^2 - W^2}{U_0^2 + W^2}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{2U_0 W'}{U_0^2 + W^2}, \qquad \left(W' = \frac{dW}{dv}\right).$$

Substituant ces expressions dans l'équation (5), on trouve

$$\frac{2U_0W'}{U_0^2 + W^2} = \frac{U-V}{\sqrt{U'}}\left(-\frac{U_0'}{U_0}\frac{U_0^2 - W^2}{U_0^2 + W^2} + \frac{2U'}{U-V} + \frac{d}{du}\log\frac{S}{U'}\right),$$

---

[1] Pour la démonstration de cette proposition, je renverrai à une Communication que j'ai faite récemment *Sur une propriété caractéristique des hélicoïdes* (p. 124 du présent Volume).

ce que l'on peut écrire de la façon suivante

$$(5)' \quad \begin{cases} 2\sqrt{U'}\,U_0 W' = (U - V)\left(U_0^2 \dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U_0 U'} + W^2 \dfrac{d}{du}\log\dfrac{SU_0}{U'}\right) \\ \qquad\qquad + 2U'U_0^2 + 2U'W^2. \end{cases}$$

Telle est l'équation aux fonctions mêlées que nous devons résoudre et rapprocher des équations (6) et (7). Si l'on écarte les surfaces *à courbure totale variable* applicables sur des surfaces de révolution, c'est-à-dire, si l'on suppose (Lemme III) que la fonction V ne se réduit pas à une constante, il est possible de déterminer en fonction de U *toutes* les expressions de U′ de S, et de U_0 qui vérifient l'équation (5)′. Laissant de côté celles qui donnent des surfaces *à courbure totale constante,* nous substituerons les autres, non dans les équations (6) et (7), mais dans la relation que l'on obtient en éliminant h entre ces deux-là.

L'équation (6), à raison de la formule (3), s'écrit

$$h^2 = S^2 + \frac{2\psi\psi'' - \psi'^2}{4}.$$

On se rappelle que ψ représente U′ et que les dérivées sont prises par rapport à U. D'autre part, l'équation (7) donne

$$\frac{dh}{dU} + \frac{S}{U_0}\frac{dU_0}{dU} = 0.$$

Éliminant h entre ces deux relations, on trouve

$$\frac{d}{dU}\sqrt{4S^2 + 2\psi\psi'' - \psi'^2} + \frac{2S}{U_0}\frac{dU_0}{dU} = 0,$$

d'où, en effectuant et chassant le radical, on déduit

$$(\Sigma) \qquad S^2(4S^2 + 2\psi\psi'' - \psi'^2)\left(\frac{d\log U_0^2}{dU}\right)^2 = \left(2\frac{dS^2}{dU} + \psi\psi'''\right)^2.$$

Toutes les expressions de S^2, de ψ et de U_0^2 que nous aurons à substituer dans cette équation, et qui sont des *fonctions rationnelles* de U, devront être rejetées, en vertu de la règle d'exclusion suivante :

Règle d'exclusion. — *L'équation de condition* (Σ) *ne peut pas être vérifiée, lorsque les fonctions* S^2 *et* $2\psi\psi'' - \psi'^2$ *ont, à* *distance finie, un pôle commun, d'ordre moindre pour* S^2 *que pour* $2\psi\psi'' - \psi'^2$.

Soit, en effet, $U = a$ un pôle d'ordre σ pour S^2, d'ordre p pour $2\psi\psi'' - \psi'^2$, *avec l'hypothèse essentielle* $\sigma \leqq p - 1$. C'est un pôle d'ordre $2p + 2$ du second membre de l'équation (Σ). Pour le premier membre, c'est un pôle d'ordre $\sigma + p$, si ce n'est pas un pôle de la dérivée logarithmique de U_0; dans le cas contraire, c'est un pôle d'ordre $\sigma + p + 2$. Comme on a, d'après l'hypothèse faite,

$$\sigma + p + 2 < 2p + 2,$$

on voit qu'il y a impossibilité.

Remarquons que, ψ étant une fonction rationnelle de U, les pôles de $2\psi\psi'' - \psi'^2$ ne sont autres que ceux de ψ et que tout pôle d'ordre ϖ de ψ est pôle d'ordre $p = 2\varpi + 2$ de $2\psi\psi'' - \psi'^2$. En conséquence, la règle d'exclusion qui précède peut être formulée ainsi :

Il est impossible que l'équation de condition (Σ) *soit vérifiée quand les fonctions* S^2 *et* ψ *ont, à distance finie, un pôle commun, d'ordre* σ *pour la première, d'ordre* ϖ *pour la seconde, si le nombre* σ *n'est pas supérieur à* $2\varpi + 1$.

4. Revenons à l'équation $(5)'$ qu'il s'agit maintenant de discuter :

$$(5)' \quad \begin{cases} 2\sqrt{U'}\,U_0 W' = (U - V)\left(U_0^2 \dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U_0 U'} + W^2 \dfrac{d}{du}\log\dfrac{SU_0}{U'}\right) \\ \qquad\qquad + 2U'U_0^2 + 2U'W^2. \end{cases}$$

Séparons ses termes et posons

$$(8) \quad \begin{cases} A = 2U_0\sqrt{U'}, \qquad B = UU_0^2 \dfrac{d}{du}\log\dfrac{SU^2}{U_0U'}, \qquad C = U\dfrac{d}{du}\log\dfrac{SU_0U^2}{U'}, \\ D = U_0^2\dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U_0U'}, \qquad E = \dfrac{d}{du}\log\dfrac{SU_0}{U'}; \end{cases}$$

enfin, divisons par A qui n'est pas nul (à raison des significations de U' et de U_0); nous trouvons

$$(\mathrm{IX}) \qquad W' - \frac{B}{A} - \frac{C}{A}W^2 + \frac{D}{A}V + \frac{E}{A}VW^2 = 0.$$

Puisque nous supposons que V ne se réduit pas à une constante, nous pouvons différentier l'équation précédente successivement par rapport à V et par rapport à u. Les accents désignant des dérivées prises par rapport à u, nous trouvons ainsi

$$(X) \qquad -\left(\frac{C}{A}\right)'\frac{dW^2}{dV}+\left(\frac{D}{A}\right)'+\left(\frac{E}{A}\right)'\frac{d(VW^2)}{dV}=0;$$

ce qui conduit à distinguer deux cas, suivant que le rapport E : A est constant ou variable.

Premier cas : $\frac{E}{A} = \text{const.} = \varepsilon$.

5. Ce cas se subdivise lui-même en deux autres, le rapport C : A pouvant être constant ou variable.

Première hypothèse : le rapport C : A est constant. L'équation (X) exige que le rapport D : A soit constant, et l'équation (IX) que le rapport B : A le soit aussi. Je dis que, dans ces conditions, on ne trouve que des surfaces à courbure totale constante. Pour s'en assurer, il suffit de prouver (Lemme II) que U' est un trinôme du second degré en U, à coefficients constants.

Désignons par β, γ, δ les valeurs constantes des rapports B : A, C : A, D : A. L'équation $E = \varepsilon A$ s'écrit

$$\frac{d}{du}\log\frac{SU_0}{U'} = 2\varepsilon U_0\sqrt{U'}.$$

Si l'on en tient compte, l'équation $C = \gamma A$ prend la forme

$$(\gamma - \varepsilon U)U_0 = \sqrt{U'}.$$

Des équations $B = \beta A$, $D = \delta A$ on tire

$$B - DU = (\beta - \delta U)A,$$

ou, en tenant compte des expressions de A, B et D,

$$\beta - \delta U = U_0\sqrt{U'}.$$

Il n'y a plus qu'à multiplier membre à membre les deux relations que nous venons d'établir pour voir que U' est un trinôme du second degré en U, à coefficients constants.

6. Seconde hypothèse : le rapport C : A n'est pas constant.

L'équation (X) prend alors la forme

$$\frac{dW^2}{dV} = \left(\frac{D}{A}\right)' : \left(\frac{C}{A}\right)'.$$

La valeur commune de ses deux membres ne peut être qu'une constante m, que nous supposerons *différente de zéro*. Car, si m était nul, la fonction W serait une constante, ce qui ne pourrait conduire qu'à des hélicoïdes (n° 3). Des équations

$$\frac{dW^2}{dV} = m, \qquad \left(\frac{D}{A}\right)' : \left(\frac{C}{A}\right)' = m,$$

on déduit par intégration

$$W^2 = m(V - l), \qquad D = mC + \delta A,$$

l et δ désignant deux constantes arbitraires. Substituant ces expressions dans l'équation (IX) et tenant compte de la relation $E = \varepsilon A$, on trouve

$$W' + \delta V + \varepsilon m V(V - l) = \frac{B - lmC}{A}.$$

Les deux membres devant être égaux à une constante β, on a

$$W' + \delta V + \varepsilon m V(V - l) = \beta, \qquad B = lmC + \beta A.$$

La première de ces équations, jointe à la relation précédemment obtenue $W^2 = m(V - l)$, détermine les deux fonctions V et W. La seconde complète un système de trois équations entre A, B, C, D et E, que nous allons reprendre et intégrer. Voici ces équations

$$B = \beta A + lmC, \qquad D = \delta A + mC, \qquad E = \varepsilon A.$$

Si l'on y remplace A, B, C, D et E par leurs expressions tirées des équations (8), on obtient trois relations que l'on peut écrire de la façon suivante

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &U(U_0^2 - lm)\frac{d}{du}\log\frac{S}{U'} - U(U_0^2 + lm)\frac{U_0'}{U_0} = 2\beta U_0\sqrt{U'} - 2(U_0^2 - lm)U', \\ &(U_0^2 - mU)\frac{d}{du}\log\frac{S}{U'} - (U_0^2 + mU)\frac{U_0'}{U_0} = 2\delta U_0\sqrt{U'} + 2mU', \\ &\frac{d}{du}\log\frac{S}{U'} + \frac{U_0'}{U_0} = 2\varepsilon U_0\sqrt{U'}. \end{aligned} \right.$$

et qu'il s'agit d'intégrer.

Ce sont là trois équations linéaires par rapport à $\sqrt{U'}$ et aux dérivées logarithmiques de $S:U'$ et de U_0. Nous allons en éliminer d'abord S et $\sqrt{U'}$, ce qui nous donnera

$$\begin{vmatrix} U(U_0^2 - lm) & -U(U_0^2 + lm)\dfrac{U'_0}{U_0} + 2(U_0^2 - lm)U' & \beta \\ U_0^2 + mU & -(U_0^2 + mU)\dfrac{U'_0}{U_0} - 2mU' & \delta \\ 1 & \dfrac{U'_0}{U_0} & \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

ou, tous calculs faits,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & U'[\varepsilon U_0^4 - (\delta + lm\varepsilon)U_0^2 + m(l\delta - \beta)] \\ & \quad + U_0 U'_0[m\varepsilon(U - l)^2 + (\delta + lm\varepsilon)(U - l) + l\delta - \beta] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux trinômes entre crochets ne peuvent pas être identiquement nuls. Car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'on pût poser $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, $\beta = 0$, ce qui réduit la dernière des équations (10) à $SU_0:U' =$ const. La précédente donne alors

$$U_0^2 + 2mU = \text{const.} = a.$$

Par suite, la première devient

$$(a - lm - mU)U' = 0$$

et entraîne visiblement $U =$ const., solution inacceptable, à raison de la forme de l'élément linéaire. En vertu de cette remarque, nous pourrons séparer les variables dans l'équation (11); et si nous posons

$$U_0^2 = -m\varphi,$$

cette équation s'écrira ainsi

$$(11)'\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2dU}{m\varepsilon(U - l)^2 + (\delta + lm\varepsilon)(U - l) + l\delta - \beta} \\ & \quad = \frac{d\varphi}{m\varepsilon\varphi^2 + (\delta + lm\varepsilon)\varphi + l\delta - \beta}. \end{aligned} \right.$$

De cette équation on pourra, au moyen de deux quadratures, tirer φ, et par suite U_0, en fonction de U. Pour obtenir U', nous éliminerons S et U'_0 entre les équations (10). On trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} U(U_0^2 - lm) & U(U_0^2 + lm) & \beta U_0\sqrt{U'} - (U_0^2 - lm)U' \\ U_0^2 - mU & U_0^2 + mU & \delta U_0\sqrt{U'} + mU' \\ 1 & -1 & \varepsilon U_0\sqrt{U'} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(12)\quad \begin{cases} -[U_0^2 + m(U-l)]U' \\ \quad = [m\varepsilon(U-l)^2 + (\delta + lm\varepsilon)(U-l) + l\delta - \beta]U_0\sqrt{U'}. \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à élever au carré et à tenir compte de la relation $U_0^2 = -m\varphi$ pour trouver

$$(12)'\quad U' = \frac{-\varphi[m\varepsilon(U-l)^2 + (\delta + lm\varepsilon)(U-l) + l\delta - \beta]^2}{m(U-l-\varphi)^2}.$$

Enfin, rapprochons la dernière des équations (10), ainsi écrite

$$\frac{1}{U'}\frac{d}{du}\log\frac{SU_0}{U'} = \frac{d}{dU}\log\frac{SU_0}{U'} = \frac{2\varepsilon U_0\sqrt{U'}}{U'},$$

de celle que nous venons d'établir, et nous aurons

$$(13)\quad \frac{d}{dU}\log\frac{SU_0}{U'} = \frac{-2\varepsilon[U_0^2 + m(U-l)]}{m\varepsilon(U-l)^2 + (\delta + lm\varepsilon)(U-l) + l\delta - \beta}.$$

Ayant exprimé U_0 en fonction de U au moyen de l'équation (11)', on connaîtra U' par la formule (12)'; l'équation (13) donnera S par une quadrature. Nous n'aurons plus qu'à substituer ces trois fonctions dans l'équation (Σ) du n° 3, où la lettre ψ désigne la fonction U'.

Pour abréger l'écriture, nous remplacerons $U - l$ par U et nous poserons

$$T(x) = m\varepsilon x^2 + (\delta + lm\varepsilon)x + l\delta - \beta,$$

ce qui nous donnera

$$(\text{XI})\qquad \frac{2\,dU}{T(U)} = \frac{d\varphi}{T(\varphi)},$$

$$(\text{XII})\qquad \psi = -\frac{\varphi\, T^2(U)}{m(U-\varphi)^2},$$

$$(\text{XIII})\qquad \frac{d}{dU}\log\frac{S^2\varphi}{\psi^2} = \frac{-4m\varepsilon(U-\varphi)}{T(U)}.$$

L'intégration de l'équation (XI) comporte quatre sous-cas, le trinôme $T(x)$ pouvant : 1° se réduire à une constante; 2° s'abaisser au premier degré; 3° être un carré parfait; 4° avoir ses racines inégales.

7. *Premier sous-cas.* — Le trinôme $T(x)$ se réduit à une constante, c'est-à-dire que l'on suppose $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ et $\beta \neq 0$, pour que l'équation (XI) ne soit pas une identité, cas traité plus haut (n° 6). Elle se réduit à $2\,dU = d\varphi$; d'où

$$\varphi = 2U - a \qquad (a = \text{const.}).$$

L'équation (XII) donne alors

$$\psi = \frac{\beta^2(a - 2U)}{m(a - U)^2}$$

et l'équation (XIII), dont le second membre est nul, montre que S^2 est proportionnel à $\psi^2 : \varphi$; on a donc

$$S^2 = \frac{b(a - 2U)}{(a - U)^4} \qquad (b = \text{const.}).$$

Il résulte des expressions de ψ et de S^2 que $U = a$ est un pôle commun à ces deux fonctions, d'ordre ϖ pour ψ, d'ordre σ pour S^2, et que l'on a toujours $\sigma \leqq 2\varpi + 1$. Car si a est nul, $\varpi = 1$, $\sigma = 3$; si a n'est pas nul, $\varpi = 2$, $\sigma = 4$. Donc (règle d'exclusion) ce sous-cas ne donne rien.

8. *Second sous-cas.* — Le trinôme $T(x)$ s'abaisse au premier degré, c'est-à-dire qu'on suppose $\varepsilon = 0$, $\delta \neq 0$. L'équation (XI) se réduit alors à

$$\frac{2\,dU}{\delta U + l\delta - \beta} = \frac{d\varphi}{\delta\varphi + l\delta - \beta};$$

on en déduit, par intégration,

$$\delta\varphi = \beta - l\delta + a(\delta U + l\delta - \beta)^2 \qquad (a = \text{const.}).$$

L'équation (XII) prend la forme

$$\psi = -\frac{\delta[a(\delta U + l\delta - \beta)^2 + \beta - l\delta]}{m[a(\delta U + l\delta - \beta) - 1]^2}.$$

L'équation (XIII) donne encore S^2 proportionnel à $\psi^2 : \varphi$; on a donc

$$S^2 = \frac{b[a(\delta U + l\delta - \beta)^2 + \beta - l\delta]}{[a(\delta U + l\delta - \beta) - 1]^4} \qquad (b = \text{const.}).$$

On voit que, si les expressions de ψ et de S^2 sont irréductibles, un pôle d'ordre $\varpi = 2$ de ψ sera pôle d'ordre $\sigma = 4$ pour S^2, et l'on aura $\sigma < 2\varpi + 1$. Si, au contraire, le facteur linéaire qui figure aux deux dénominateurs appartient aussi aux deux numérateurs, sa racine sera pôle d'ordre $\varpi = 1$ pour ψ, d'ordre $\sigma = 3$ pour S^2, et l'on aura $\sigma = 2\varpi + 1$. Donc (règle d'exclusion) aucune des solutions du présent sous-cas n'est acceptable. Ce qui précède tomberait en défaut si a était nul. Mais alors ψ, qui n'est autre chose que U', se réduisant à une constante, l'élément linéaire (1) ne conviendrait qu'à des développables.

9. *Troisième sous-cas.* — Le trinôme $T(x)$ est un carré parfait, c'est-à-dire qu'on suppose l'identité

$$T(x) = m\varepsilon x^2 + (\delta + lm\varepsilon)x + l\delta - \beta = m\varepsilon(x - r)^2 \qquad (r = \text{const.}).$$

L'équation (XI) prend alors la forme

$$\frac{2\,dU}{(U - r)^2} = \frac{d\varphi}{(\varphi - r)^2}.$$

On en déduit, avec une nouvelle constante a,

$$\frac{1}{\varphi - r} = a + \frac{2}{U - r}, \qquad \varphi = \frac{(ar + 1)(U - r) + 2r}{a(U - r) + 2}.$$

Portant cette valeur de φ dans la formule (XII), on trouve

$$\psi = -\frac{m\varepsilon^2(U - r)^2[(ar + 1)(U - r) + 2r][a(U - r) + 2]}{[a(U - r) + 1]^2}.$$

La même substitution, faite au second membre de l'équation (XIII), donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dU}\log\frac{S^2\varphi}{\psi^2} &= \frac{-4[a(U - r) + 1]}{(U - r)[a(U - r) + 2]} \\ &= -2\frac{d}{dU}\log(U - r)[a(U - r) + 2]. \end{aligned}$$

On aura donc, en intégrant et désignant par b_0 une constante arbitraire,

$$S^2 = \frac{b_0 \psi^2}{\varphi(U-r)^2[a(U-r)+2]^2}.$$

Remplaçant maintenant φ et ψ par leurs expressions obtenues ci-dessus, nous aurons

$$S^2 = \frac{b(U-r)^2[a(U-r)+2][(ar+1)(U-r)+2r]}{[a(U-r)+1]^4} \qquad (b = \text{const.}).$$

On voit que, si a n'est pas nul, ψ et S^2 auront un pôle commun; s'il est d'ordre $\varpi = 2$ pour ψ, il sera d'ordre $\sigma = 4$ pour S^2; s'il est d'ordre $\varpi = 1$ pour ψ, il sera d'ordre $\sigma = 3$ pour S^2. On aura donc toujours $\sigma \leqq 2\varpi + 1$, d'où impossibilité (règle d'exclusion).

Si a est nul, φ, ψ et S^2 se réduisent à des polynômes entiers, savoir:

$$\varphi = \frac{U+r}{2}, \qquad \psi = -2m\varepsilon^2(U-r)^2(U+r), \qquad S^2 = \lambda\psi.$$

Or, si l'on se reporte à la condition (Σ) du n° 3, qui peut actuellement s'écrire

$$S^2(4S^2 + 2\psi\psi'' - \psi'^2)\varphi'^2 = \varphi^2\left(2\frac{dS^2}{dU} + \psi\psi'''\right)^2,$$

on reconnaît que les deux membres sont des polynômes entiers en U, le premier du degré 7, le second du degré 8. Il y a donc encore impossibilité.

10. *Quatrième sous-cas.* — Le trinôme $T(x)$ a ses racines inégales

$$T(x) = m\varepsilon(x-r)(x-s) \qquad (r - s \neq 0).$$

L'équation (XI) prend alors la forme

$$\frac{2\,dU}{(U-r)(U-s)} = \frac{d\varphi}{(\varphi-r)(\varphi-s)}.$$

En intégrant, on en déduit, avec une nouvelle constante a,

$$\frac{\varphi - r}{\varphi - s} = a\frac{(U-r)^2}{(U-s)^2}, \qquad \varphi = \frac{r(U-s)^2 - as(U-r)^2}{(U-s)^2 - a(U-r)^2}.$$

A raison de cette expression de φ, la formule (XII) devient

$$\psi = \frac{-m\varepsilon^2[r(U-s)^2 - as(U-r)^2][(U-s)^2 - a(U-r)^2]}{[U-s-a(U-r)]^2}.$$

Cette même valeur de φ, substituée au second membre de l'équation (XIII), donne

$$\frac{d}{dU}\log\frac{S^2\varphi}{\psi^2} = -\frac{4[U-s-a(U-r)]}{(U-s)^2-a(U-r)^2}$$
$$= -2\frac{d}{dU}\log[(U-s)^2-a(U-r)^2].$$

On a donc, en désignant par b_0 une constante arbitraire,

$$S^2 = \frac{b_0\psi^2}{\varphi[(U-s)^2-a(U-r)^2]^2},$$

ou, en remplaçant φ et ψ par les expressions précédentes,

$$S^2 = \frac{b[r(U-s)^2-as(U-r)^2][(U-s)^2-a(U-r)^2]}{[U-s-a(U-r)]^4} \qquad (b = \text{const.}).$$

Il n'y a pas lieu de faire $a = 0$; car, dans cette hypothèse, U', qui n'est autre chose que ψ, se réduit à $-mr\varepsilon^2(U-s)^2$, ce qui ne donne (Lemme II) que des développables.

Soit donc $a \neq 0$. Les expressions de φ et de S^2 seront des fractions rationnelles, à moins que l'on ait $a = 1$, auquel cas il vient

$$\varphi = \frac{U^2-rs}{2U-r-s}, \qquad \psi = -m\varepsilon^2(U^2-rs)(2U-r-s), \qquad S^2 = \lambda\psi.$$

Or, si l'on substitue dans la condition (Σ) la valeur qui vient d'être obtenue pour φ, on trouvera

$$S^2(4S^2+2\psi\psi''-\psi'^2)[U^2-2(r+s)U+2rs]^2$$
$$=(2U-r-s)^2(U^2-rs)^2\left(2\frac{dS^2}{dU}+\psi\psi'''\right)^2,$$

ce qui ne se peut, les deux membres étant des polynômes entiers en U, le premier de degré 11, le second de degré 12.

D'après ce qui précède, nous devons désormais supposer $a(a-1) \neq 0$. Dans ces conditions, l'unique racine des dénominateurs de ψ et de S^2 est un pôle commun à ces deux fonctions. Si elle n'annule pas leurs numérateurs ($ar - s \neq 0$), c'est un pôle d'ordre $\varpi = 2$ pour ψ, d'ordre $\sigma = 4$ pour S^2; dans le cas contraire ($ar - s = 0$), c'est un pôle d'ordre $\varpi = 1$ pour ψ, d'ordre $\sigma = 3$ pour S^2; de sorte qu'on a toujours $\sigma \leqq 2\varpi + 1$. Il y a donc toujours impossibilité (règle d'exclusion).

Second cas : $\left(\frac{E}{A}\right)' \neq 0$.

11. Écrivons à nouveau l'équation du problème

$$W' - \frac{B}{A} - \frac{C}{A}W^2 + \frac{D}{A}V + \frac{E}{A}VW^2 = 0, \tag{IX}$$

et celle que nous en avons déduite par différentiation

$$-\left(\frac{C}{A}\right)'\frac{dW^2}{dV} + \left(\frac{D}{A}\right)' + \left(\frac{E}{A}\right)'\frac{d(VW^2)}{dV} = 0. \tag{X}$$

Divisons tous les termes de cette dernière par la dérivée du rapport $E:A$, puis différentions successivement par rapport à u et par rapport à V; nous aurons

$$\frac{d}{du}\left[\left(\frac{C}{A}\right)' : \left(\frac{E}{A}\right)'\right]\frac{d}{dV}\left(\frac{dW^2}{dV}\right) = 0.$$

On ne peut pas supposer que le second facteur soit nul; car si l'on avait

$$\frac{dW^2}{dV} = \text{const.} = g,$$

on devrait supposer $g \neq 0$, l'hypothèse $g = 0$ ou $W = \text{const.}$ ne donnant que des hélicoïdes (n° 3); l'équation (X) deviendrait

$$-g\left(\frac{C}{A}\right)' + \left(\frac{D}{A}\right)' + \left(\frac{E}{A}\right)'\frac{d(VW^2)}{dV} = 0,$$

et l'on en conclurait

$$\frac{d(VW^2)}{dV} = \text{const.},$$

ce qui est contradictoire avec $\frac{dW^2}{dV} = \text{const.} = g \neq 0$.

En conséquence, on a

$$\left(\frac{C}{A}\right)' = m\left(\frac{E}{A}\right)' \qquad (m = \text{const.});$$

d'où, en intégrant, on déduit

$$C = \gamma A + mE \qquad (\gamma = \text{const.}).$$

Alors, l'équation (X) devient

$$\frac{d}{dV}[(V-m)W^2] = -\left(\frac{D}{A}\right)' : \left(\frac{E}{A}\right)'.$$

On en conclut que les deux membres sont constants. Soit $-n$ leur valeur commune. Intégrant les deux équations

$$\frac{d}{dV}[(V-m)W^2] = -n, \qquad \left(\frac{D}{A}\right)' = n\left(\frac{E}{A}\right)',$$

on trouve

$$(V-m)W^2 = -nV + l, \qquad D = \delta A + nE,$$

l et δ désignant deux nouvelles constantes. Substituons dans l'équation (IX) les valeurs trouvées pour C et D; il vient

$$W' - \frac{B}{A} - \gamma W^2 + \frac{E}{A}[(V-m)W^2 + nV] + \delta V = 0.$$

En vertu de l'expression de W^2, le coefficient de $E : A$ se réduit à l et il reste

$$W' - \gamma W^2 + \delta V = \frac{B - lE}{A}.$$

Les deux membres ont une valeur constante β; d'où

$$W' - \gamma W^2 + \delta V - \beta = 0, \qquad B = \beta A + lE.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer V et W, les deux équations

$$(V-m)W^2 + nV - l = 0, \qquad W' - \gamma W^2 + \delta V - \beta = 0,$$

qu'on peut écrire comme suit :

$$V = m + \frac{l - mn}{W^2 + n}, \qquad W' - \gamma W^2 + \frac{\delta(mW^2 + l)}{W^2 + n} - \beta = 0,$$

puisque, W^2 étant supposé variable, $W^2 + n$ est différent de zéro.

La première de ces équations détermine V une fois que W a été déduit de la seconde; elle montre que $l - mn$ doit être supposé *différent de zéro,* puisque V est supposé (à cause du Lemme III) ne pas se réduire à une constante.

12. Portons notre attention sur les trois relations que nous venons d'établir entre les fonctions S, U_0 et U, savoir

$$B = \beta A + lE, \qquad C = \gamma A + mE, \qquad D = \delta A + nE.$$

Si l'on y remplace A, B, C, D, E par les expressions (8), on obtient trois équations que l'on peut écrire ainsi

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} (UU_0^2 - l)\dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U'} - (UU_0^2 + l)\dfrac{U_0'}{U_0} + 2U_0^2 U' = 2\beta U_0\sqrt{U'}, \\ (U - m)\dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U'} + (U - m)\dfrac{U_0'}{U_0} \quad + \quad 2U' \quad = 2\gamma U_0\sqrt{U'}, \\ (U_0^2 - n)\dfrac{d}{du}\log\dfrac{S}{U'} - (U_0^2 + n)\dfrac{U_0'}{U_0} \qquad\qquad = 2\delta U_0\sqrt{U'}, \end{array}\right.$$

et que nous avons à intégrer. Ce sont là trois équations linéaires par rapport à $\sqrt{U'}$ et aux dérivées logarithmiques de $S:U'$ et de U_0.

Nous allons, par un procédé analogue à celui du n° 6, en déduire un système équivalent, intégrable par de simples quadratures. Nous éliminerons d'abord S et $\sqrt{U'}$, ce qui donnera

$$\begin{vmatrix} (UU_0^2 - l) & -(UU_0^2 + l)\dfrac{U_0'}{U_0} + 2U_0^2 U' & \beta \\ U - m & (U - m)\dfrac{U_0'}{U_0} + 2U' & \gamma \\ U_0^2 - n & -(U_0^2 + n)\dfrac{U_0'}{U_0} & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, tous calculs faits,

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} U'[-\gamma U_0^4 + (\beta + n\gamma - m\delta)U_0^2 - n\beta + l\delta] \\ \quad = U_0 U_0'[\delta U^2 - (\beta - n\gamma + m\delta)U + m\beta - l\gamma]. \end{array}\right.$$

On ne peut pas supposer que les deux trinômes entre crochets soient identiquement nuls, car cette hypothèse entraînerait $\beta = \gamma = \delta = 0$, c'est-à-dire $B = lE$, $C = mE$, $D = nE$. L'équation (IX) prendrait la forme

$$\frac{A}{E}W' - l - mW^2 + nV + VW^2 = 0,$$

et exigerait que le rapport $E:A$ fût constant, contrairement à notre hypothèse actuelle.

Cette remarque permet de séparer les variables dans l'équation (15) et d'écrire

$$\frac{U'}{\delta U^2-(\beta-n\gamma+m\delta)U+m\beta-l\gamma} = \frac{U_0 U'_0}{-\gamma U_0^4+(\beta+n\gamma-m\delta)U_0^2-n\beta+l\delta},$$

ou encore

$$\frac{(U-m)'}{\delta(U-m)^2-(\beta-n\gamma-m\delta)(U-m)+(mn-l)\gamma} = \frac{U_0 U'_0}{-\gamma(U_0^2-n)^2+(\beta-n\gamma-m\delta)(U_0^2-n)-(mn-l)\delta}.$$

Comme on doit supposer $mn-l \neq 0$, on pourra poser

$$U_0^2-n=\frac{mn-l}{f},$$

ce qui donnera

$$(15)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2(U-m)'}{\delta(U-m)^2-(\beta-n\gamma-m\delta)(U-m)+(mn-l)\gamma} \\ &\quad = \frac{f'}{\delta f^2-(\beta-n\gamma-m\delta)f+(mn-l)\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation donne f, et par suite U_0, en fonction de U. Pour obtenir U', nous éliminerons S et U'_0 entre les équations (14). Nous aurons ainsi

$$\begin{vmatrix} UU_0^2-l & UU_0^2+l & \beta U_0\sqrt{U'}-U_0^2U' \\ U-m & -(U-m) & \gamma U_0\sqrt{U'}-U' \\ U_0^2-n & U_0^2+n & \delta U_0\sqrt{U'} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\delta(U-m)^2-(\beta-n\gamma-m\delta)(U-m)+(mn-l)\gamma]U_0\sqrt{U'} \\ &\quad = -U'[(U-m)(U_0^2-n)-(mn-l)], \end{aligned} \right.$$

Il suffit d'élever au carré et d'avoir égard à la relation qui définit f pour trouver

$$(16)' \quad U'=\frac{[\delta(U-m)^2-(\beta-n\gamma-m\delta)(U-m)+(mn-l)\gamma]^2(nf+mn-l)f}{(mn-l)^2(U-m-f)^2}.$$

Enfin, pour déterminer S, reportons-nous à la seconde des équations (14), qui peut s'écrire ainsi

$$(U-m)\frac{d}{du}\log\frac{SU_0(U-m)^2}{U'} = 2\gamma U_0\sqrt{U'};$$

divisant ses deux membres par $(U - m)U'$ et tenant compte de la relation (16), on en tire

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dU}\log\dfrac{SU_0(U-m)^2}{U'} \\ \quad = \dfrac{-2\gamma(mn-l)(U-m-f)}{[\delta(U-m)^2-(\beta-m\delta-n\gamma)(U-m)+(mn-l)\gamma](U-m)f}. \end{cases}$$

Ayant ainsi déterminé successivement U_0, U' et S en fonction de U, nous devrons substituer leurs expressions dans l'équation (Σ) du n° 3, où la lettre ψ désigne la fonction U'.

Pour abréger l'écriture, nous remplacerons $U - m$ par U et nous poserons

$$\theta(x) = \delta x^2 - (\beta - n\gamma - m\delta)x + (mn - l)\gamma,$$

ce qui nous donnera

$$\text{(XV)}\qquad \frac{2dU}{\theta(U)} = \frac{df}{\theta(f)},$$

$$\text{(XVI)}\qquad \psi = \frac{\theta^2(U)(nf + mn - l)f}{(mn-l)^2(U-f)^2},$$

$$\text{(XVII)}\qquad \frac{d}{dU}\log\frac{S^2U^4(nf+mn-l)}{f\psi^2} = \frac{-4\gamma(mn-l)(U-f)}{Uf\theta(U)}.$$

L'intégration de l'équation (XV) nécessite l'examen de quatre sous-cas, le trinôme $\theta(x)$ pouvant : 1° se réduire à une constante; 2° s'abaisser au premier degré; 3° être un carré parfait; 4° avoir ses racines inégales.

13. *Premier sous-cas.* — Le trinôme $\theta(x)$ se réduit à une constante, c'est-à-dire qu'on suppose $\delta = 0$, $\beta = n\gamma$ et $\gamma \neq 0$, pour que l'équation (XV) ne soit pas une identité, circonstance écartée précédemment (n° 12). Elle se réduit alors à $2dU = df$, d'où

$$f = 2U - a \qquad (a = \text{const.}).$$

Substituant f dans la formule (XVI), on trouve

$$\psi = \frac{\gamma^2(2U-a)(2nU - an + mn - l)}{(U-a)^2}.$$

La même substitution, faite dans le second membre de l'équation (XVII), donne

$$\frac{d}{dU}\log\frac{S^2U^4(nf+mn-l)}{f\psi^2}=\frac{4(U-a}{U(2U-a)}.$$

De là, en intégrant et désignant par b_0 une nouvelle constante arbitraire, on tire

$$\frac{S^2U^4(nf+mn-l)}{f\psi^2}=\frac{b_0U^4}{(2U-a)^2}.$$

Si l'on tient compte des valeurs trouvées pour f et ψ, il vient

$$S^2=\frac{b(2U-a)(2nU-an+mn-l)}{(U-a)^4}\qquad (b=\text{const.}).$$

La constante a ne doit pas être supposée nulle, car cette hypothèse, réduisant ψ, c'est-à-dire U', à une constante, ne donne que des développables. Dès lors, a n'étant pas nul, $U=a$ est un pôle commun à ψ et à S^2. S'il n'est point racine de leurs numérateurs, c'est un pôle d'ordre $\varpi=2$ pour ψ, d'ordre $\sigma=4$ pour S^2; s'il annule les numérateurs, c'est un pôle d'ordre $\varpi=1$ pour ψ, d'ordre $\sigma=3$ pour S^2; on a donc toujours $\sigma\leqq 2\varpi+1$, ce qui est un cas d'impossibilité (règle d'exclusion).

14. *Second sous-cas.* — Le trinôme $\theta(x)$ s'abaisse au premier degré, c'est-à-dire qu'on suppose $\delta=0$, $\beta-n\gamma\neq 0$. L'équation (XV) devient

$$\frac{2\,dU}{(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma}=\frac{df}{(\beta-n\gamma)f-(mn-l)\gamma}.$$

Intégrant et désignant par a une constante, on obtient

$$f=\frac{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma}{\beta-n\gamma}.$$

La formule (XVI) donne alors

$$\psi=\frac{\left\{\begin{array}{l}\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma\}\\ \times\{an[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\beta\}\end{array}\right\}}{(mn-l)^2\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2-1\}^2}.$$

Substituant ces expressions de f et de ψ dans le second membre de l'équation (XVII), on trouve

$$\frac{d}{dU}\log\frac{S^2 U^4(nf+mn-l)}{f\psi^2}$$
$$=\frac{-4\gamma(mn-l)\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]-1\}}{U\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma\}}.$$

Le second membre étant égal à deux fois la dérivée logarithmique de la fraction

$$\frac{U^2}{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma},$$

l'intégration donne, avec une constante arbitraire b_0,

$$S^2=\frac{b_0 f\psi^2}{(nf+mn-l)\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma\}^2}.$$

Remplaçant maintenant f et ψ par leurs expressions, on aura

$$S^2=\frac{\left\{\begin{array}{l} b_0\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\gamma\} \\ \quad\times\{an[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]^2+(mn-l)\beta\}\end{array}\right\}}{(mn-l)^4\{a[(\beta-n\gamma)U-(mn-l)\gamma]-1\}^4}.$$

Remarquons que la constante a doit être supposée différente de zéro; car si a était nul, la fonction ψ, qui n'est autre chose que U', se réduirait à une constante : on n'aurait affaire qu'à des développables. Soit donc $a \neq 0$. Comme on suppose actuellement $\beta - n\gamma \neq 0$, les dénominateurs de ψ et de S^2 ont une racine, qui est un pôle commun aux deux fractions. Si cette racine n'annule pas leur numérateur, ce sera un pôle d'ordre $\varpi = 2$ pour ψ, d'ordre $\sigma = 4$ pour S^2. Si elle annule l'un des facteurs du numérateur, elle ne peut annuler l'autre, à cause de l'inégalité $\beta - n\gamma \neq 0$; ce sera donc un pôle d'ordre $\varpi = 1$ pour ψ, d'ordre $\sigma = 3$ pour S^2. On a donc toujours $\sigma \leqq 2\varpi + 1$, ce qui correspond à une impossibilité (règle d'exclusion).

15. *Troisième sous-cas.* — Le trinôme $\theta(x)$ est un carré parfait, c'est-à-dire qu'on suppose l'identité

$$\theta(x) = \delta(U-r)^2.$$

Dès lors, l'équation (XV) devient

$$\frac{2\,dU}{(U-r)^2}=\frac{df}{(f-r)^2}.$$

On en déduit, en intégrant,

$$f = \frac{(ar+1)(U-r)+1}{a(U-r)+2} \qquad (a = \text{const.}).$$

Portons cette valeur dans la formule (XVI), en posant pour abréger

$$P = (ar+1)(U-r)+2r, \qquad Q = a(U-r)+2,$$

il viendra

$$\psi = \frac{\delta^2 P[nP+(mn-l)Q](U-r)^2}{(mn-l)^2[a(U-r)+1]^2}.$$

Substituons les expressions de f et de ψ dans le second membre de l'équation (XVII); nous trouvons

$$\frac{d}{dU}\log\frac{S^2U^4[nP+(mn-l)Q]}{P\psi^2} = \frac{-4\gamma(mn-l)[a(U-r)+1]}{\delta PU(U-r)}.$$

Mais l'identité $\theta(x) = \delta(U-r)^2$ entraîne $(mn-l)\gamma = \delta r^2$, de sorte que le second membre de l'équation précédente est égal à deux fois la dérivée logarithmique de la fraction

$$\frac{U^2}{(U-r)P}.$$

On a donc, en intégrant,

$$\frac{S^2[nP+(mn-l)Q]}{P\psi^2} = \frac{b_0}{(U-r)^2P^2} \qquad (b_0 = \text{const.}).$$

Remplaçant maintenant ψ par son expression, on aura

$$S^2 = \frac{bP[nP+(mn-l)Q](U-r)^2}{[a(U-r)+1]^4} \qquad (b = \text{const.}).$$

On voit que, si a n'est pas nul, les dénominateurs de ψ et de S^2 auront une racine qui sera un pôle commun aux deux fonctions. S'il est pôle d'ordre $\varpi = 2$ pour ψ, il sera pôle d'ordre $\sigma = 4$ pour S^2; s'il est pôle d'ordre $\varpi = 1$ pour ψ, il sera pôle d'ordre $\sigma = 3$ pour S^2. On a donc toujours $\sigma \leqq 2\varpi + 1$, ce qui correspond à une impossibilité (règle d'exclusion).

Si $a = 0$, les trois fonctions f, ψ, S^2 se réduisent à des polynômes entiers, savoir

$$f=\frac{U+r}{2},\quad \psi=\frac{\delta^2(U+r)[n(U+r)+2(mn-l)](U-r)^2}{(mn-l)^2},\quad S^2=\lambda\psi,$$

λ désignant une constante arbitraire. Substituons-les dans l'équation (Σ) du n° 3 qui, ici, prend la forme

$$(mn-l)^2S^2(4S^2+2\psi\psi''-\psi'^2)\left(\frac{df}{dU}\right)^2$$
$$=f^2(nf+mn-l)^2\left(2\frac{dS^2}{dU}+\psi\psi'''\right)^2.$$

Le premier membre est un polynôme entier du même degré que $\psi\psi'^2$, tandis que le degré du second membre est supérieur d'au moins 2 unités au double du degré de $\psi\psi'''$. Soit q le degré de ψ ($q=4$ si $n\neq 0$, $q=3$ si $n=0$); on a évidemment l'inégalité

$$q+2(q-1)<2+2(2q-3),$$

qui revient à $q>2$, de sorte que le premier membre est nécessairement de degré moindre que le second. Il y a donc encore impossibilité.

16. *Quatrième sous-cas.* — Le trinôme $\theta(x)$ a ses racines inégales

$$\theta(x)=\delta(x-r)(x-s)\qquad (r-s\neq 0).$$

L'équation (XV) devient

$$\frac{2\,dU}{(U-r)(U-s)}=\frac{df}{(f-r)(f-s)}.$$

Son intégration donne, avec une constante a,

$$\frac{f-r}{f-s}=a\frac{(U-r)^2}{(U-s)^2},\qquad f=\frac{P}{Q},$$

si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$P=r(U-s)^2-as(U-r)^2,\qquad Q=(U-s)^2-a(U-r)^2.$$

Substituant cette valeur de f dans la formule (XVI), on aura

$$\psi=\frac{\delta^2P[nP+(mn-l)Q]}{(mn-l)^2[a(U-r)-(U-s)]^2}.$$

Portons cette expression de ψ et celle de f dans le second membre de l'équation (XVII); il viendra

$$\frac{d}{dU}\log\frac{S^2U^4(nf+mn-l)}{f\psi^2}=\frac{4\gamma(mn-l)[a(U-r)-(U-s)]}{\delta PU}.$$

Or l'identité $\theta(x)=\delta(x-r)(x-s)$ entraîne $(mn-l)\gamma=\delta rs$, de sorte que le second membre est égal à deux fois la dérivée logarithmique de $U^2:P$. On a donc, en intégrant,

$$\frac{S^2(nf+mn-l)}{f\psi^2}=\frac{b_0}{P^2}\qquad (b_0=\text{const.}),$$

ou encore, eu égard aux expressions de f et de ψ,

$$S^2=\frac{bP[nP+(mn-l)Q]}{[a(U-r)-(U-s)]^4}\qquad (b=\text{const.}).$$

On voit que, si a n'est pas égal à 1, les dénominateurs de ψ et de S^2 auront une racine, qui sera un pôle commun à ces deux fonctions. S'il est pôle d'ordre $\varpi=2$ pour ψ, il est pôle d'ordre $\sigma=4$ pour S^2; s'il est pôle d'ordre $\varpi=1$ pour ψ, il est pôle d'ordre $\sigma=3$ pour S^2. On a donc toujours $\sigma\leqq 2\varpi+1$, ce qui correspond à une impossibilité (règle d'exclusion).

Si $a=1$, ψ et S^2 sont des polynômes entiers et l'on a

$$f=\frac{U^2-rs}{2U-r-s}\qquad \psi=\lambda(U^2-rs)[n(U^2-rs)+(mn-l)(2U-r-s)],$$
$$S^2=\mu\psi,$$

λ et μ désignant deux constantes dont la dernière est arbitraire. Substituons seulement l'expression de f dans l'équation (Σ) du n° 3, savoir

$$(mn-l)^2S^2(4S^2+2\psi\psi''-\psi'^2)\left(\frac{df}{dU}\right)^2=f^2(nf+mn-l)^2\left(2\frac{dS^2}{dU}+\psi\psi'''\right)^2;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&4(mn-l)^2S^2(4S^2+2\psi\psi''-\psi'^2)(U-r)^2(U-s)^2\\&=[n(U^2-rs)+(mn-l)(2U-r-s)]^2(U^2-rs)^2\left(2\frac{dS^2}{dU}+\psi\psi'''\right)^2.\end{aligned}$$

Or, si l'on observe que S^2 et ψ ne diffèrent que par un facteur constant du produit

$$[n(U^2-rs)+(mn-l)(2U-r-s)](U^2-rs),$$

on pourra, en désignant par ρ une constante, écrire

$$\rho(4\mu\psi+2\psi\psi''-\psi'^2)(U-r)^2(U-s)^2=\psi(2\mu\psi'+\psi\psi''')^2.$$

Soit q le degré de ψ ($q=4$ si $n\neq 0$, $q=3$ si $n=0$). Le premier membre est du degré $2q+2$, le second du degré $q+2(2q-3)$, de sorte que le premier membre est toujours de degré moins élevé que le second. Il y a donc encore impossibilité, ce qui achève la démonstration du théorème énoncé au début.