A. GRÉVY

# Équations fonctionnelles avec second membre

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 25 (1897), p. 57-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__57_1>

# MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

## ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC SECOND MEMBRE;

Par M. GRÉVY.

**1.** L'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=0,$$

dans laquelle les coefficients $p_i(z)$ sont holomorphes dans le domaine d'un point limite $x$ pour la substitution $z_{i+1}=\varphi(z_i)$, admet des solutions dont la forme, au point limite, dépend de l'équation caractéristique (¹)

$$p_0(x)+p_1(x)t+\ldots+p_n(x)t_n=0.$$

En particulier, si cette équation admet la racine simple 1, et n'admet aucune racine de la forme $[\varphi'(x)]^m$, $m$ étant entier, positif, l'équation fonctionnelle a une solution holomorphe dans le

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894, p. 267.

domaine du point $x$ et non nulle en ce point; cette fonction est définie à un facteur constant près.

**2.** Ces résultats rappelés, considérons l'équation fonctionnelle avec second membre

$$(1)\qquad p_0(z)f(z)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=q(z),$$

dans laquelle $p_0(z)$, ..., $p_n(z)$, $q(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point $x$, $p_0(x)$ et $p_n(x)$ étant différents de zéro.

Soient $f(z)$, $f'(z)$ deux solutions de l'équation (1) avec second membre; leur différence vérifiant l'équation sans second membre

$$\begin{aligned}&p_0(z)[f'(z)-f(z)]\\&\quad+p_1(z)[f'(z_1)-f(z_1)]+\ldots+p_n(z)[f'(z_n)-f(z_n)]=0,\end{aligned}$$

la solution générale de l'équation (1) se déduira de la solution générale de l'équation sans second membre par l'addition d'une solution particulière de l'équation (1); pour obtenir une telle solution, faisons sur l'équation (1) la substitution $z$, $\varphi(z)$ :

$$(2)\qquad p_0(z_1)f(z_1)+p_1(z_1)f(z_2)+\ldots+p_n(z_1)f(z_{n+1})=q(z_1).$$

Multipliant l'équation (1) par $q(z_1)$ et l'équation (2) par $q(z)$, et retranchant, il vient

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&q(z_1)p_0(z)f(z)+[q(z_1)p_1(z)-q(z)p_0(z_1)]f(z_1)+\ldots\\&\quad+[q(z_1)p_n(z)-q(z)p_{n-1}(z_1)]f(z_n)-q(z)\,p_n(z_1)fz_{n+1})=0,\end{aligned}\right.$$

équation d'ordre $n+1$ sans second membre, que doit vérifier la fonction $f(z)$.

**3.** $q(x)\neq 0$. L'équation caractéristique est alors

$$p_0(x)+[p_1(x)-p_0(x)]t+\ldots+[p_n(x)-p_{n-1}(x)]t^n-p_n(x)t^{n+1}=0$$

ou

$$(1-t)[p_0(x)+p_1(x)t+\ldots+p_n(x)t^n]=0.$$

Cette équation admet la racine 1 et les racines de l'équation caractéristique relative à l'équation fonctionnelle obtenue en supprimant le second membre de l'équation (1).

Si l'on suppose que cette équation caractéristique n'admet ni la racine 1, ni une racine $[\varphi'(x)]^m$, $m$ entier positif, $[\varphi'(x)]$ étant différent de zéro, l'équation fonctionnelle (3) a une solution holomorphe non nulle au point $x$; soit $f(z)$; nous allons voir que cette solution vérifie l'équation (1).

Désignant, pour abréger, par $F(z)$ le premier membre de (1), l'équation (3) est

$$F(z)\,q(z_1) - F(z_1)\,q(z) = 0$$

ou

$$\frac{F(z_1)}{q(z_1)} = \frac{F(z)}{q(z)},$$

équation fonctionnelle relative à $\frac{F(z)}{q(z)}$, qui n'a pas de solution holomorphe dans le domaine du point $x$, si ce n'est une constante; comme la solution $f(z)$ considérée est holomorphe, il en est de même de $F(z)$; on doit avoir

$$F(z) = kq(z),$$

$k$ étant une constante arbitraire.

La valeur de $f(z)$ étant définie à un facteur constant près, on peut le choisir de façon que cette fonction vérifie l'équation (1)

$$F(z) = q(z);$$

$f(z)$ est donc bien une solution particulière de (1).

**4.** La détermination du facteur qui entre dans $f(z)$ n'est plus possible si 1 est solution de l'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)\,t + \ldots + p_n(x)\,t^n = 0,$$

le premier membre de l'équation fonctionnelle (1) étant nul au point $x$, sans que le second membre le soit; supposons que 1 soit racine d'ordre $\alpha$ de l'équation caractéristique; nous pouvons employer le même procédé que pour l'équation sans second membre [1].

Soit Y une solution de l'équation sans second membre, cette solution étant holomorphe et non nulle en $x$, correspondant à la

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894, p. 278.

racine 1 de l'équation caractéristique; posons

$$f(z) = \mathrm{YV}.$$

L'équation (1) devient

$$p_0(z)\,\mathrm{YV} + p_1(z)\,\mathrm{Y_1 V_1} + \ldots + p_n(z)\,\mathrm{Y}_n \mathrm{V}_n = q(z),$$

$\mathrm{Y_1}, \mathrm{Y_2}, \ldots; \mathrm{V_1}, \mathrm{V_2}, \ldots$ étant les transformées de Y et V par la substitution $[z, \varphi(z)]$.

Tenant compte de la relation

$$p_0(z)\,\mathrm{Y} + p_1(z)\,\mathrm{Y_1} + \ldots + p_n(z)\,\mathrm{Y}_n = 0,$$

et, prenant pour fonction inconnue

$$\mathrm{V_1} - \mathrm{V} = \mathrm{U},$$

on a

$$\begin{aligned} &p_0 \mathrm{YU} + (p_0 \mathrm{Y} + p_1 \mathrm{Y_1})\,\mathrm{U_1} + \ldots \\ &\quad + (p_0 \mathrm{Y} + p_1 \mathrm{Y_1} + \ldots + p_{n-1} \mathrm{Y}_{n-1})\,\mathrm{U}_{n-1} = -q(z), \end{aligned}$$

équation de même forme que l'équation (1), mais dont l'équation caractéristique ne renferme la racine 1 qu'à l'ordre $\alpha - 1$.

Si l'on répète les mêmes transformations, on trouvera finalement une équation fonctionnelle

$$\mathrm{P_0}(z)\,\mathrm{T}(z) + \mathrm{P_1}(z)\,\mathrm{T}(z_1) + \ldots + \mathrm{P}_{n-\alpha}\mathrm{T}(z_{n-\alpha}) = q(z),$$

dont l'équation caractéristique n'admet plus la racine 1 et admet toutes les autres racines de l'équation caractéristique primitive; l'équation fonctionnelle en $\mathrm{T}(z)$ a donc une solution non nulle au point $x$ et holomorphe dans le domaine de ce point.

De cette solution, on déduit pour l'équation (1) une solution de la forme

$$\mathrm{Y}[kb^\alpha(z) + \lambda_1(z)\,b^{\alpha-1}(z) + \ldots + \lambda_\alpha(z)],$$

Y étant une fonction holomorphe dans le domaine du point $x$ et non nulle en ce point, $k$ étant une constante différente de zéro et $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_\alpha(z)$ des fonctions holomorphes dans le domaine du point $x$.

Ces résultats subsistent si $\varphi'(x) = 0$; il suffit de remplacer $b(z)$ par $c(z)$.

5. Il reste à examiner le cas où, $\varphi'(x)$ étant différent de zéro, l'équation caractéristique admet des solutions de la forme $\varphi'(x)^m$ ($m$ entier positif); pour simplifier, je supposerai qu'il n'existe que deux telles racines $[\varphi'(x)]^{m_1}$, $[\varphi'(x)]^{m_2}$, $(m_1 > m_2)$.

Si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^{m_1} Y,$$

l'équation (1) devient

$$[B(z)]^{m_1} \left\{ p_0(z) Y + p_1(z)[\varphi'(x)]^{m_1} Y_1 + \ldots + p_n(z)[\varphi'(x)]^{n m_1} Y_n \right\} = q(z).$$

L'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)[\varphi'(x)]^{m_1} t + \ldots + p_n(x)[\varphi'(x)]^{n m_1} t^n = 0$$

a les racines $[\varphi'(x)]^{m_2 - m_1}$ et 1.

A la racine 1 correspond, pour l'équation fonctionnelle

$$p_0(z) Y + \ldots + p_n(z)[\varphi'(x)]^{n m_1} Y_n = 0,$$

une solution holomorphe non nulle au point $x$; soit $Y'$.

Si l'on pose

$$Y = Y'V, \qquad V_1 - V = U,$$

l'équation (1) prend la forme

$$[B(z)]^{m_1} [p'_0(z) U + p'_1(z) U_1 + \ldots + p'_{n-1}(z) U_{n-1}] = q(z),$$

l'équation caractéristique

$$p'_0(x) + p'_1(x) t + \ldots + p'_{n-1}(x) t^{n-1} = 0$$

n'ayant plus la racine 1, mais ayant la racine $[\varphi'(x)]^{m_2 - m_1}$.

Posons

$$U = [B(z)]^{m_2 - m_1} T,$$

il vient

$$[B(z)]^{m_1 + m_2 - m_1} \left\{ \begin{aligned} & p'_0 . T + p'_1 . [\varphi'(x)]^{m_2 - m_1} T_1 \\ & + \ldots + p' . [\varphi'(x)]^{(n-1)(m_2 - m_1)} T_{n-1} \end{aligned} \right\} = q(z).$$

L'équation, obtenue en égalant à zéro la quantité entre crochets, a une solution holomorphe, non nulle en $x$, car son équation caractéristique a la racine 1; soit $T'$.

Posant

$$T = T'R, \qquad R_1 - R = S,$$

on forme une équation

$$[B(z)]^{m_2}[p''_0 S + p''_1 S_1 + \ldots + p''_{n-2} S_{n-2}] = q(z),$$

l'équation caractéristique de la quantité entre crochets n'ayant plus la racine 1.

Pour ramener cette équation au type étudié au début, il suffit de prendre pour nouvelle fonction inconnue

$$S = S'.[B(z)]^{-m_2}.$$

Il existera alors une solution S' holomorphe en $x$ et non nulle.

A la solution

$$S = S'B^{-m_2},$$

correspondent

$$R = \frac{P(z)}{(z-x)^{m_2}} + \mu b(z), \qquad T = \frac{P'(z)}{(z-x)^{m_2}} + Q(z)b(z),$$

$P'(z)$ étant holomorphe et non nulle en $x$, $Q(z)$ étant holomorphe en $x$.

On a de même

$$U = \frac{P''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{Q'(z)b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}},$$

$$Y = \frac{P'''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{P_1(z)b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}} + Q''(z)b^2(z),$$

$$f(z) = F_1(z)(z-x)^{m_1}b^2(z) + F_2(z)(z-x)^{m_2}b(z) + F_3(z),$$

$F_1$, $F_2$, $F_3$ étant des fonctions holomorphes au point $x$.

Ce qui précède suffit pour montrer la forme de cette solution particulière dans le cas général ; le résultat concorde avec celui qui a été trouvé pour les équations sans second membre ; on peut résumer ces résultats comme il suit :

*L'équation fonctionnelle avec second membre non nul au point limite a une solution de la forme*

$$f_0(z) + (z-x)^{m_1} f_1(z)\, b(z) + \ldots + (z-x)^{m_\alpha} f_\alpha(z)\, b^\alpha,$$

$f_0, f_1, \ldots, f_\alpha$ *étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point limite,* $m_1, \ldots, m_\alpha$ *étant les exposants des puissances de* $\varphi'(x)$, *qui sont solutions de l'équation caractéristique, plusieurs de ces quantités pouvant être égales.*

6. Le cas de $q(x) = 0$ se ramène au précédent; supposons que $x$ soit racine d'ordre $k$; si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^k Y,$$

on a

$$[B(z)]^k \left\{ p_0 Y + p_1[\varphi'(x)]^k Y_1 + \ldots + p_n[\varphi'(x)]^{nk} Y_n \right\} = q(z);$$
$$p_0 Y + p_1[\varphi'(x)]^k Y_1 + \ldots + p_n[\varphi'(x)]^{nk} Y_n = \frac{q(z)}{[B(z)]^k}.$$

Cette dernière équation est du type étudié plus haut; son équation caractéristique se déduit de l'équation caractéristique primitive par la multiplication des racines par $\frac{1}{[\varphi'(x)]^k}$.

7. La même transformation permet d'étudier les équations pour lesquelles $q(z)$ n'est pas holomorphe au point $x$, mais est de la forme

$$(z - x)^\alpha \theta(z),$$

$\alpha$ étant quelconque et $\theta(z)$ une fonction holomorphe; il suffit de remarquer que le quotient

$$\frac{q(z)}{[B(z)]^\alpha}$$

est une fonction holomorphe dans un domaine du point $x$, qui ne renferme aucun zéro de $q(z)$ ou de $B(z)$.

8. Remarquons que la marche que nous avons suivie montre que la connaissance d'une solution d'une équation sans second membre permet d'abaisser l'ordre de l'équation avec second membre.