

BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Théorème nouveau de réversibilité algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 136-139

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__136_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__136_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME NOUVEAU DE RÉVERSIBILITÉ ALGÈBRIQUE;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Il a paru récemment, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, sous le n° 811 et avec la signature BUENGER, une question intéressante de réversibilité algébrique. En voici l'énoncé textuel :

Si l'on pose

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

les formules

$$\frac{f(x, y, z)}{X} = \frac{f(y, z, x)}{Y} = \frac{f(z, x, y)}{Z}.$$

donnent

$$\frac{f(X, Y, Z)}{x} = \frac{f(Y, Z, X)}{y} = \frac{f(Z, X, Y)}{z}.$$

Y a-t-il d'autres exemples analogues?

En cherchant de tels exemples, j'ai obtenu un théorème général

qui en fournit une infinité : celui qu'on vient de lire n'est que le premier, c'est-à-dire le plus simple d'entre eux.

2. Considérons les deux suites, de n nombres chacune,

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots, \dots, x_n, \\ X_1, X_2, X_3, \dots, \dots, X_n. \end{aligned}$$

Avec les nombres de la première, formons le rectangle, de n colonnes et de $n - 1$ lignes,

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{array}$$

et, avec ceux de la seconde, le rectangle pareil

$$\begin{array}{ccccccccc} X_2 & X_3 & X_4 & \dots & X_n & X_1 \\ X_3 & X_4 & X_5 & \dots & X_1 & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & X_1 & X_2 & \dots & X_{n-2} & X_{n-1} \end{array}$$

Prenons les déterminants qui se déduisent du premier de ces rectangles par la suppression de la 1^{re}, de la 2^e, ..., de la $n^{\text{ième}}$ colonne, et, après les avoir affectés alternativement du signe + et du signe —, désignons-les par $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; prenons enfin les déterminants qui se déduisent du second rectangle par le même procédé, et, après les avoir affectés aussi alternativement des signes + et —, désignons-les par $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Le théorème général qui fait l'objet de la présente Note peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME. — Si l'on a

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

on a aussi

$$\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \dots = \frac{\Delta_n}{x_n};$$

et réciproquement.

3. Ce théorème, pour $n = 3$, nous donne, aux notations près, l'exemple cité par M. Buenger. Il nous en donne évidemment une infinité d'autres, d'autant plus compliqués qu'ils correspondent à des valeurs plus grandes de n . C'est un théorème très général. C'est aussi, ce me semble, un théorème nouveau. J'en ai envoyé à l'*Intermédiaire*, comme réponse à la question 811, l'énoncé tel qu'on vient de le lire, mais sans le faire suivre de la démonstration. C'est cette démonstration que je vais exposer maintenant.

4. Supposons que l'on ait

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

et considérons le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est du $n^{\text{ième}}$ ordre et qui, par la suppression de sa première ligne, se réduit au premier des rectangles formés précédemment. Il est évident que nous avons

$$M = A_1 \delta_1 + A_2 \delta_2 + A_3 \delta_3 + \dots + A_{n-1} \delta_{n-1} + A_n \delta_n.$$

Or, si l'on remplace, dans ce déterminant M , les éléments A de la première ligne par les éléments correspondants d'une quelconque des lignes suivantes, ce déterminant s'annule. De là ces $n - 1$ identités

$$\begin{aligned} x_2 \delta_1 + x_3 \delta_2 + x_4 \delta_3 + \dots + x_n \delta_{n-1} + x_1 \delta_n &= 0, \\ x_3 \delta_1 + x_4 \delta_2 + x_5 \delta_3 + \dots + x_1 \delta_{n-1} + x_2 \delta_n &= 0, \\ \dots & \\ x_n \delta_1 + x_1 \delta_2 + x_2 \delta_3 + \dots + x_{n-2} \delta_{n-1} + x_{n-1} \delta_n &= 0. \end{aligned}$$

Ces identités étant homogènes par rapport aux quantités δ , nous pouvons y remplacer ces quantités δ par les quantités X qui leur correspondent et qui, d'après notre hypothèse, leur sont

