BULLETIN DE LA S. M. F.

M. D'OCAGNE

Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point sur un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 65-70

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__65_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA COMPOSITION DES LOIS DE PROBABILITÉ DES ERREURS DE SITUATION D'UN POINT SUR UN PLAN;

Par M. M. d'Ocagne.

Le but de la présente Note est de faire connaître la démonstration de résultats qui ont été présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 5 mars 1894 (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 517).

1. — Lemme analytique.

Posant

$$\varphi(u_1, u_2) = a_1 u_1^2 + 2 b u_1 u_2 + a_2 u_2^2 + 2 c_1 u_1 + 2 c_2 u_2 + d,$$

considérons la somme de tous les éléments infiniment petits de la forme

$$e^{-\varphi(u_1,u_2)}\, du_1\, du_2$$

tels que $u_1 + u_2$ soit compris entre t et $t + dt$. Cette somme pourra s'écrire

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-u_1}^{t+dt-u_1} e^{-\varphi(u_1,u_2)}\, du_1\, du_2.$$

Cette intégrale a pour *valeur principale*

$$\mathrm{I} = dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u_1,t-u_1)}\, du_1.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi(u_1, t - u_1) = l u_1^2 + 2 m u_1 + n, \qquad \text{avec} \left\{ \begin{aligned} l &= a_1 - 2b + a_2, \\ m &= (b - a_2) t + (c_1 - c_2), \\ n &= a_2 t^2 + 2 c_2 t + d. \end{aligned} \right.$$

Décomposant cette forme quadratique en une somme de carrés, on a

$$\varphi(u_1, t - u_1) = \left(\sqrt{l}\, u_1 + \frac{m}{\sqrt{l}}\right)^2 + \frac{nl - m^2}{l}.$$

L'intégrale précédente devient donc, en posant $\sqrt{l}\, u_1 + \dfrac{m}{\sqrt{l}} = v$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= dt . e^{-\frac{nl-m^2}{l}} \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\, dv, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{l}}\, e^{-\frac{nl-m^2}{l}}\, dt, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant l, m, n par leurs valeurs ci-dessus et réduisant,

$$(1)\ \mathrm{I} = \sqrt{\frac{\pi}{a_1 - 2b + a_2}}\, e^{-\frac{(a_1 a_2 - b^2)t^2 + 2[a_1 c_2 + a_2 c_1 - b(c_1 + c_2)]t + d(a_1 - 2b + a_2) - (c_1 - c_2)^2}{a_1 - 2b + a_2}}\, dt,$$

2. — Erreurs a un paramètre.

Avant d'aborder le problème principal que nous avons en vue, traitons le cas particulier des erreurs à un paramètre.

n causes d'erreurs agissant isolément donnent naissance aux lois de probabilité exprimées (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) par

$$p_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\pi}}\, e^{-\alpha_i x_i^2}\, dx_i.$$

Déterminer la loi de probabilité des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire lorsque leurs effets s'ajoutent.

Prenons d'abord $n = 2$.

La probabilité, pour que l'on ait un écart compris entre x et $x + dx$, est donnée par

$$p = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x - x_1}^{x + dx - x_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2)}\, dx_1\, dx_2,$$

ou, d'après la formule (1), dans laquelle on fait $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, $t = x$, $a_1 = \alpha_1$, $a_2 = \alpha_2$, $b = c_1 = c_2 = d = 0$,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}\, e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x^2}\, dx,$$

qui, lorsqu'on pose

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

est bien de la forme

$$(2)\qquad p = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}\, dx.$$

La relation précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

On en déduit immédiatement que, dans le cas général, on aura encore une loi de la forme (2), α étant donné par

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i}. \tag{3}$$

Puisque l'on a, d'une manière générale, en représentant par η_i l'erreur probable correspondant à la probabilité p_i,

$$\eta_i \sqrt{\alpha_i} = 0,4769\ldots,$$

la formule (3) peut s'écrire

$$\eta^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i^2.$$

Ainsi se trouve démontré rigoureusement, lorsque l'on admet la loi de Gauss, le théorème bien connu : *Lorsque diverses causes d'erreurs s'ajoutent, le carré de l'erreur probable résultante est égale à la somme des carrés des erreurs probables composantes.*

3. — Erreurs a deux paramètres.

n causes d'erreurs agissant isolément sur la position d'un point sur un plan donnent naissance aux lois de probabilité exprimées (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) par

$$p_i = \frac{\sqrt{\delta_i}}{\pi} e^{-(\alpha_i x_i^2 + 2\beta_i x_i y_i + \gamma_i y_i^2)}\, dx_i\, dy_i \qquad (\text{où } \delta_i = \alpha_i\gamma_i - \beta_i^2),$$

déterminer la loi de probabilité des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire lorsque leurs effets s'ajoutent.

Supposons d'abord $n = 2$.

La probabilité pour que les écarts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) se produisent simultanément est le produit $p_1 p_2$ et l'écart résultant (x, y) est alors tel que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Donc la probabilité totale pour que cet écart se produise est donnée par

$$p = \frac{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}{\pi^2} \mathrm{H}, \tag{4}$$

avec

$$\mathrm{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+dx-x_1} \int_{y-y_1}^{y+dy-y_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_2 y_2 + \gamma_2 y_2^2)}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2, \tag{5}$$

Posons

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+dx-x_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_2 y_2 + \gamma_2 y_2^2)}\, dx_1\, dx_2.$$

Cette intégrale est de la forme de celle qui a été calculée dans le lemme, lorsqu'on fait dans celle-ci

$$u_1 = x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad t = x,$$

$$a_1 = \alpha_1, \quad b = 0, \quad a_2 = \alpha_2, \quad c_1 = \beta_1 y_1, \quad c_2 = \beta_2 y_2, \quad d = \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2.$$

Par suite, la formule (1) donne ici

$$\mathrm{I} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}}\, e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2 x^2 + 2[\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_2 \gamma_1] x + (\gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2)(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 y_1 - \beta_2 y_2)^2}{\alpha_1 + \alpha_2}}\, dx.$$

On a maintenant

$$\mathrm{H} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}}\, \mathrm{J}\, dx, \tag{6}$$

avec

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y-y_1}^{y+dy-y_1} e^{-[\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2) - \beta_1^2] y_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 y_1 y_2 + [\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2) - \beta_2^2] y_2^2 + 2\alpha_2 \beta_1 x y_1 + 2\alpha_1 \beta_2 x y_2 + \alpha_1 \alpha_2 x^2}\, dy_1\, dy_2.$$

intégrale encore calculable par la formule (1) où l'on fait

$$u_1 = y_1, \qquad u_2 = y_2, \qquad t = y,$$

$$a_1 = \frac{\gamma_1(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad b = \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad a_2 = \frac{\gamma_2(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

$$c_1 = \frac{\alpha_2 \beta_1 x}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad c_2 = \frac{\alpha_1 \beta_2 x}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad d = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x^2.$$

On obtient ainsi, après réduction,

$$J = \sqrt{\frac{\pi(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2}}\, e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}\, dy,$$

avec

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha_1\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)-(\alpha_1\beta_2^2+\alpha_2\beta_1^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2}, \\ \beta = \dfrac{\beta_2\alpha_1\gamma_1+\beta_1\alpha_2\gamma_2-\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2}, \\ \gamma = \dfrac{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)-(\gamma_1\beta_2^2+\gamma_2\beta_1^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2}. \end{cases}$$

Portant cette valeur de J dans (6) et la valeur de H ainsi obtenue dans (4), on a

$$(8)\quad p = \sqrt{\frac{\delta_1\delta_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2}}\, e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}\, dx\, dy.$$

Formons l'expression $\delta = \alpha\gamma - \beta^2$.

Pour cela, remarquons que, si nous posons

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)-(\beta_1+\beta_2)^2 = D,$$

les formules (7) peuvent s'écrire

$$(9)\quad \alpha = \frac{\delta_2\alpha_1+\delta_1\alpha_2}{D}, \qquad \beta = \frac{\delta_2\beta_1+\delta_1\beta_2}{D}, \qquad \gamma = \frac{\delta_2\gamma_1+\delta_1\gamma_2}{D}.$$

Dès lors

$$\delta = \frac{(\delta_2\alpha_1+\delta_1\alpha_2)(\delta_2\gamma_1+\delta_1\gamma_2)-(\delta_2\beta_1+\delta_1\beta_2)^2}{D^2}$$
$$= \frac{\delta_1\delta_2(\delta_1+\delta_2+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1-2\beta_1\beta_2)}{D^2}.$$

Mais on vérifie immédiatement que

$$\delta_1+\delta_2+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1-2\beta_1\beta_2 = D.$$

Il vient donc

$$(10)\quad \delta = \frac{\delta_1\delta_2}{D},$$

et la formule (8) devient

$$(11)\quad p = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\, e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}\, dx\, dy.$$

On retrouve donc bien une loi résultante de même forme que les deux lois composantes, les paramètres α, β, γ étant d'ailleurs définis par les formules (9).

Pour étendre ce résultat au cas de n causes d'erreurs, transformons ces formules en y remplaçant D par sa valeur tirée de (10). Nous voyons alors qu'elles peuvent s'écrire

$$(12)\qquad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha_1}{\delta_1} + \frac{\alpha_2}{\delta_2}, \qquad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_2}{\delta_2}, \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma_1}{\delta_1} + \frac{\gamma_2}{\delta_2}.$$

Dès lors, effectuant de proche en proche la composition des n lois d'erreurs, on voit que l'on obtiendra encore la loi représentée par la formule (11), les paramètres α, β, γ étant déterminés par les formules

$$(13)\qquad \frac{\alpha}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha_i}{\delta_i}, \qquad \frac{\beta}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\beta_i}{\delta_i}, \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\gamma_i}{\delta_i}.$$

Pour tirer de là α, β et γ, posons

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha_i}{\delta_i} = \mathrm{A}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\beta_i}{\delta_i} = \mathrm{B}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\gamma_i}{\delta_i} = \mathrm{C}.$$

Nous avons alors

$$\alpha = \delta\mathrm{A}, \qquad \beta = \delta\mathrm{B}, \qquad \gamma = \delta\mathrm{C},$$

d'où l'on déduit, en posant $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = \Delta$,

$$\delta = \delta^2 \Delta$$

ou

$$1 = \delta\Delta.$$

Les formules précédentes deviennent alors

$$(14)\qquad \alpha = \frac{\mathrm{A}}{\Delta}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{\mathrm{C}}{\Delta}.$$

Ce sont ces dernières qui permettront de calculer α, β, γ en fonction des α_i, β_i, γ_i.