P. ADAM

Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 110-115
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__110_0>

SUR LES SURFACES ADMETTANT POUR LIGNES DE COURBURE DEUX SÉRIES DE CERCLES GÉODÉSIQUES ORTHOGONAUX;

Par M. Paul Adam.

Dans son Mémoire célèbre sur la déformation des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier) O. Bonnet a déterminé la surface la plus générale admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux. Sa méthode, qui repose sur l'emploi des formules de Codazzi, donne lieu à des calculs, sinon pénibles, du moins fort longs : la formation des équations de la surface prend dix-sept pages.

Or, si les formules de Codazzi facilitent, dans bien des cas, la résolution des problèmes, il en est d'autres où le contraire a lieu. Ici, par exemple, on peut déterminer les surfaces en question par une marche beaucoup plus simple que celle de Bonnet.

Si l'on écrit le ds^2 d'une surface isothermique

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la détermination d'une telle surface revient à la recherche de trois solutions x, y, z de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

liées entre elles par la condition

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces qui admettent pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux, ayant pour ds^2

$$ds^2 = \frac{1}{(U+V)^2}(du^2 + dv^2),$$

il suffit, pour les obtenir, de trouver trois solutions de l'équation suivante

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + \frac{V'}{U+V}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{U'}{U+V}\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

et d'avoir égard à (1).

L'équation (2) s'intègre tout de suite et donne

$$0 = \frac{U_1 + V_1}{U + V}, \tag{3}$$

où les lettres ont une signification évidente.

Il faut donc prendre pour x, y, z trois expressions de la forme (3), en leur donnant, bien entendu, le même dénominateur $U + V$, puis déterminer les fonctions qui entrent en numérateur par la condition (1).

On peut évidemment, en prenant U et V pour nouvelles variables, écrire

$$x, y, z = \frac{U_1 + V_1,\ U_2 + V_2,\ U_3 + V_3}{u + v},$$

x, y, z étant toujours astreintes à la relation (1), laquelle fournit

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(u+v)^2(U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2 + U'_3 V'_3) \\ &\quad -(u+v)[(U_1 + V_1)(U'_1 + V'_1) \\ &\qquad + (U_2 + V_2)(U'_2 + V'_2) + (U_3 + V_3)(U'_3 + V'_3)] \\ &\qquad\quad + (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation fonctionnelle paraît compliquée; mais, si l'on pose

$$(U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 2(u + v)\varphi(u, v),$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

de sorte qu'elle revient à

$$(U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 + 2(u + v)(U_4 + V_4) = 0. \tag{5}$$

Cette équation, étant développée, a pour premier membre une somme de termes de la forme $F(u)\Phi(v)$. Or l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i B_i = 0,$$

dans laquelle les A dépendent d'une variable α et les B d'une autre variable β, admet, outre les deux solutions évidentes qui consistent à annuler soit tous les A, soit tous les B, $n - 1$ autres solutions définies par les formules

$$A_j = \sum_{k=1}^{k=l} a_k^j A_k, \qquad j = l+1,\ l+2,\ \ldots,\ n,$$

$$-B_{j'} = \sum_{k=l+1}^{k=n} a_{j'}^k B_k, \qquad j' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l,$$

dans lesquelles les a sont des constantes arbitraires; et ces $n - 1$ solutions s'obtiennent en donnant à l les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Appliquons cela à l'équation (5) développée, en faisant jouer aux fonctions de u et de v ci-après le rôle des fonctions A et B écrites en regard :

1	A_1,	$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 v$	B_1,
u	A_2,	$2V_4$	B_2,
U_1	A_3,	$2V_1$	B_3,
U_2	A_4,	$2V_2$	B_4,
U_3	A_5,	$2V_3$	B_5,
U_4	A_6,	$2v$	B_6,
$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4 u$	A_7,	1	B_7.

En ayant égard à la symétrie de l'équation (5), on voit qu'il n'y a, pour cette équation, que deux solutions à essayer, celles qui correspondent à $l = 2$ et à $l = 3$. En effet, si l'on change le classement qui vient d'être indiqué pour les fonctions de u et de v ci-dessus, en rangeant les fonctions de v dans l'ordre inverse de celui qu'avaient les fonctions analogues de u, les hypothèses $l = 4$ et $l = 5$ conduiront aux mêmes solutions de l'équation (5), sauf remplacement de u par v et de v par u, que les hypothèses $l = 3$ et $l = 2$. On aboutira donc pour les coordonnées de la surface aux expressions données par $l = 3$ et $l = 2$, où l'on changerait u en v et v en u.

1° *Hypothèse* $l = 2$. — Dans cette hypothèse, U_1, U_2 et U_3 sont des fonctions linéaires de u; il en résulte que, par un transport des axes parallèlement à eux-mêmes, les coordonnées de la surface peuvent être ramenées à la forme

$$\frac{\varphi(v)}{u+v}; \tag{6}$$

la surface serait alors un cône dont les génératrices auraient pour paramètre v; tous les cônes répondent évidemment à la question; toutefois, en achevant le calcul, on reconnaît que des coordonnées de la forme (6) ne peuvent vérifier la relation (1); cela tient à ce que nous avons particularisé les fonctions U et V, et qu'il faudrait actuellement faire $V = 0$ pour que les courbes (u) pussent être, sur le cône, les trajectoires orthogonales des génératrices.

2° *Hypothèse* $l = 3$. — Il vient alors

$$\left\{\begin{aligned}
U_2 &= a_1^4 + a_2^4 u + a_3^4 U_1,\\
U_3 &= a_1^5 + a_2^5 u + a_3^5 U_1,\\
U_4 &= a_1^6 + a_2^6 u + a_3^6 U_1,\\
U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4 u &= a_1^7 + a_2^7 u + a_3^7 U_1,\\
-(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 v) &= 2a_1^4 V_2 + 2a_1^5 V_3 + 2a_1^6 v + a_1^7,\\
-2V_4 &= 2a_2^4 V_2 + 2a_2^5 V_3 + 2a_2^6 v + a_2^7,\\
-2V_1 &= 2a_3^4 V_2 + 2a_3^5 V_3 + 2a_3^6 v + a_3^7.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces équations se simplifient beaucoup par les remarques suivantes.

D'abord U_2 et U_3 étant des fonctions linéaires de u et de U_1, les coordonnées y et z de la surface se ramènent, par un transport des axes parallèlement au plan des yz, à la forme

$$\frac{mU_1 + \varphi(v)}{u+v} \qquad (m = \text{const.}).$$

On peut donc, sans restreindre la généralité du résultat, supposer U_2 et U_3 de la forme mU_1, c'est-à-dire faire

$$a_1^4 = a_2^4 = a_1^5 = a_2^5 = 0,$$

et l'on a alors

$$\left\{\begin{aligned}
x &= \frac{U_1 + V_2}{u+v},\\
y &= \frac{a_3^4 U_1 + V_2}{u+v},\\
z &= \frac{a_3^5 U_1 + V_3}{u+v},
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

d'où l'on déduit

$$(y - a_3^4 x)(V_3 - a_3^5 V_1) - (z - a_3^5 x)(V_2 - a_3^4 V_1) = 0.$$

Les courbes (v) sont donc dans des plans passant par la droite fixe

$$y = a_3^4 x, \qquad z = a_3^5 x.$$

Cette droite étant prise pour axe des x, il vient

$$a_3^4 = a_3^5 = 0.$$

Les équations (8) de la surface et la dernière des équations de condition (7) se réduisent ainsi à

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{U_1 + V_1}{u + v}, \\ y &= \frac{V_2}{u + v}, \\ z &= \frac{V_3}{u + v}, \end{aligned}\right.$$

$$(10) \qquad 2V_1 = -2a_3^6 v - a_3^7.$$

En transportant enfin les axes parallèlement à Ox, ce qui ne change pas ce dernier axe déjà particularisé, on donne à la coordonnée x la forme $\frac{f(u)}{u+v}$; on peut, en conséquence, supposer la fonction V_1 nulle, c'est-à-dire faire $a_3^6 = a_3^7 = 0$.

En définitive, les équations (9) de la surface et les équations de condition (7) sont maintenant

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{U_1}{u + v}, \\ y &= \frac{V_2}{u + v}, \\ z &= \frac{V_3}{u + v}, \end{aligned}\right.$$

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} U_4 &= a_1^6 + a_2^6 u, \\ U_1^2 + 2U_4 u &= a_1^7 + a_2^7 u, \\ V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 v &= -2a_1^6 v - a_1^7, \\ 2V_4 &= -2a_2^6 v - a_2^7. \end{aligned}\right.$$

En posant

$$V_2 = V_6 \cos V_5,$$
$$V_3 = V_6 \sin V_5,$$

V_5 et V_6 étant deux nouvelles fonctions de v, on tire des équations (12)

$$U_1^2 = -2a_2^6 u^2 + u(a_2^7 - 2a_1^6) + a_1^7,$$
$$V_6^2 = 2a_2^6 v^2 + v(a_2^7 - 2a_1^6) - a_1^7,$$

ce qui peut s'écrire tout simplement, en passant à une surface homothétique, et appelant a et b deux constantes arbitraires,

$$U_1^2 = -u^2 + 2au + b,$$
$$V_6^2 = v^2 + 2av - b.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer u par $u+h$ et v par $v-h$, à prendre pour h l'une des racines de l'équation

$$h^2 - 2ah - b = 0$$

et à poser

$$2(a-h) = \alpha,$$

pour obtenir

$$U_1^2 = \alpha u - u^2,$$
$$V_6^2 = \alpha v + v^2,$$

puis les équations de Bonnet

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{u(\alpha-u)}}{u+v}, \\ y &= \frac{\sqrt{v(\alpha+v)}}{u+v}\cos V_5, \\ z &= \frac{\sqrt{v(\alpha+v)}}{u+v}\sin V_5, \end{aligned} \right.$$

qui comprennent, comme cas particulier, les équations des cyclides de Dupin.