BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Un théorème général de mécanique

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 151-154
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__151_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Un théorème général de Mécanique; par M. C.-A. Laisant.

La proposition dont il s'agit, et que je crois nouvelle, est une généralisation de celle des forces vives. En voici l'énoncé :

Soit un système matériel en mouvement depuis le temps t_0 jusqu'au temps t. Si m représente la masse d'un quelconque des points qui composent ce système; v_0 et v les vitesses de ce point au commencement et à la fin de la période considérée; F *la force qui agit sur le point m;* F_1 *une force de même direction appliquée au même point, mais dont la grandeur a pour expression* $F\frac{f'(v)}{v}$, *$f(v)$ étant une fonction arbitraire de la vitesse; si enfin* T_1 *représente le travail total des forces* F_1 *pendant la période considérée, l'accroissement de la fonction* $\Sigma m f(v)$ *sera égal au travail* T_1, *c'est-à-dire qu'on aura*

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

La démonstration, calquée sur celle de la proposition des forces vives, est des plus simples. On a en effet, identiquement,

$$d f(v) = f'(v)\, dv = \frac{f'(v)}{v}\frac{ds}{dt}\, dv = \frac{f'(v)}{v}\frac{dv}{dt}\, ds,$$

ou, en multipliant par m,

$$d[m f(v)] = m\frac{dv}{dt}\frac{f'(v)}{v}\, ds.$$

Or $m\frac{dv}{dt}$ représente la composante tangentielle de la force F. Donc $m\frac{dv}{dt}\frac{f'(v)}{v}$ sera la composante tangentielle de la force

$$F_1 = F\frac{f'(v)}{v},$$

et, par conséquent, le second membre représente le travail élémentaire de cette force F_1 pendant le temps infiniment petit dt.

Si nous étendons la relation ci-dessus à tous les points qui composent le système, nous aurons donc

$$d[\Sigma m f(v)] = dT_1,$$

c'est-à-dire la somme des travaux élémentaires de toutes les forces F_1, et en intégrant de t_0 à t,

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

Nous examinerons maintenant plusieurs cas particuliers, remarquablement simples, auxquels s'applique ce théorème général, et qui dépendent du choix qu'on fait de la fonction arbitraire $f(v)$.

1° Soit $f(v) = v^2$; alors $\frac{f'(v)}{v} = 2$, $F_1 = 2F$, et l'on retombe sur le théorème des forces vives

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2T.$$

2° Soit $f(v) = v^n$; alors $\frac{f'(v)}{v} = nv^{n-2}$ et les forces F_1 ayant pour expression nFv^{n-2}, on a

$$\Sigma m v^n - \Sigma m v_0^n = T_1.$$

Par exemple, l'accroissement de la somme des quantités de mouvement est donnée par le travail des forces $\frac{F}{v}$.

3° Soient $f(v) = \log v$; alors $\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{v^2}$; $F_1 = \frac{F}{v^2}$; et le travail de ces forces F_1 donne la valeur de

$$\sum m \log v - \sum m \log v_0 = \sum m \log \frac{v}{v_0}.$$

4° Soient $f(v) = e^{\frac{v^2}{2}}$; alors $\frac{f'(v)}{v} = e^{\frac{v^2}{2}}$, $F_1 = Fe^{\frac{v^2}{2}}$, c'est-à-dire que le coefficient par lequel il faut multiplier chaque force est précisément égal à la fonction considérée $f(v)$;

$$\sum me^{\frac{v^2}{2}} - \sum me^{\frac{v_0^2}{2}} = \text{travail des forces } Fe^{\frac{v^2}{2}}$$

Il semble que la proposition précédente peut être utile, en permettant d'obtenir dans certains cas une intégrale du mouvement que ne donnerait pas le théorème des forces vives.

Supposons par exemple que les forces qui agissent sur les points d'un système soient données par des expressions de la forme $F\varphi(v)$. Choisissons pour $f(v)$ la fonction $\int \frac{v\,dv}{\varphi(v)}$, en disposant d'ailleurs à volonté de la constante arbitraire. On aura

$$\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{\varphi(v)};$$

et les forces F_1 se réduiront aux forces F. Si ces dernières admettent une fonction des forces, et que l'équation des surfaces de niveau soit $\Phi(x, y, z) = k$, on aura

$$\Sigma m\, f(v) - \Sigma m f(v_0) = \Sigma\,[\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)],$$

alors que l'accroissement $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ n'aurait pu être ainsi obtenu par une intégration pure et simple.

Prenons, comme cas particulier, l'hypothèse d'un système de points matériels sollicités vers un centre fixe par des forces qui sont à la fois proportionnelles à la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance r, et à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la vitesse.

L'expression de l'une de ces forces est $mkr^p v^n$. Posons

$$f(v) = \int v^{1-n}\,dv = \frac{1}{2-n}v^{2-n},$$

si $n \gtrless 2$, et

$$f(v) = \log v$$

si $n = 2$.

Nous aurons l'expression

$$\frac{1}{2-n}(\Sigma mv^{2-n} - \Sigma mv_0^{2-n})$$

dans le premier cas, et

$$\Sigma m \log v - \Sigma m \log v_0$$

dans le second, qui sera fournie par le travail des forces mkr^p, appliquées aux divers points du système et dirigées vers le centre d'attraction. Or, ce travail est fourni pour chaque point par l'intégrale

$$-\int kmr^p\,dr = \frac{km}{p+1}(r_0^{p+1} - r^{p+1}),$$

les surfaces de niveau étant des sphères dont le centre d'attraction est le centre commun.

Le travail pour tout le système est donc

$$\frac{k}{p+1}(\Sigma m r_0^{p+1} - \Sigma m r^{p+1}).$$

Il y a, bien entendu, exception pour le cas où $p = -1$, car l'intégrale est alors $km \log \frac{r_0}{r}$.

Si, en particulier, $n = 2$ et $p = -1$, c'est-à-dire pour des forces $mk\frac{v^2}{r}$, il vient

$$\sum m \log \frac{v}{v_0} = k \sum m \log \frac{r_0}{r}.$$

Cette relation, qui peut encore s'écrire

$$\sum \log \left(\frac{v r^k}{v_0 r_0^k}\right)^m = 0$$

et qui montre que pour chaque point du système la quantité vr^k reste invariable pendant le mouvement, aurait d'ailleurs pu s'obtenir aisément d'une manière directe dans ce cas particulier.

FIN DU TOME XXI.