

BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Propriétés d'un système de points dans un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 109-112

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__109_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__109_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Propriétés d'un système de points dans un plan;
par M. FÉLIX LUCAS.

Considérons dans le plan un système quelconque de p points M, ayant pour affixes les racines de l'équation

$$(1) \quad F(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = 0.$$

Points centraux. — Les *points centraux* C de ce système sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre, en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse. Ce sont les points racines de l'équation dérivée

$$(2) \quad F'(z) = p(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_{p-1}) = 0.$$

On a identiquement

$$(3) \quad F_m(z_m) = \left[\frac{F(z)}{z - z_m} \right]_{z=z_m} = F'(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad F_1(z_1) F_2(z_2) \dots F_p(z_p) = F'(z_1) F'(z_2) \dots F'(z_p).$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$\prod \overline{M_m M_n^2} = p^p \prod \overline{M_m C_n},$$

c'est-à-dire que le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points M est égal à p^p fois le produit des distances de ces points M à leurs points centraux C .

Dans le cas particulier où les points M occupent les sommets d'un polygone régulier de rayon R , tous les points C occupent le centre de ce polygone; on voit ainsi que le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets d'un polygone régulier de rayon R est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. Ce théorème s'exprime par la formule trigonométrique

$$(5) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \sin \frac{m\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Conjugués d'un point quelconque S. — Considérons maintenant, en présence des points M , un point quelconque S du plan et soit σ son affixe. Les *conjugués* P de ce point, relativement au système M , sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre en présence des attractions des points M ayant l'unité de masse et de la répulsion du point S ayant la masse p . Ces conjugués de S sont les points racines de l'équation du degré $p - 1$

$$p F(z) - (z - \sigma) F'(z) = 0.$$

Le coefficient du terme du plus haut degré, c'est-à-dire le coefficient de z^{p-1} , est $p(\sigma - \gamma)$, en désignant par γ l'affixe du centre des moyennes distances C des points donnés. On peut donc déterminer les affixes des conjugués de S , en égalant à zéro le polynôme

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{p F(z) - (z - \sigma) F'(z)}{p(\sigma - \gamma)} = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{p-1}).$$

Cela posé, on a identiquement

$$(7) \quad p(\sigma - \gamma) \varphi(z_m) = (\sigma - z_m) F'(z_m) = (\sigma - z_m) F_m(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(8) \quad p^p \frac{\varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{F_1(z_1) F_2(z_2) \dots F_p(z_p)} = \frac{(\sigma - z_1)(\sigma - z_2) \dots (\sigma - z_p)}{(\sigma - \gamma)^p}.$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$(9) \quad p^p \frac{\prod \overline{M_m P_n}}{\prod \overline{M_m M_n}^2} = \frac{\prod \overline{S M_m}}{S G^p};$$

c'est-à-dire que *le produit des distances des points M aux conjugués P du point S, multiplié par p^p et divisé par le produit des carrés des distances des points M, est égal au produit des distances du point S aux points M, divisé par la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance de ce point S au centre des moyennes distances G de ces points M.*

Dans le cas particulier où les points M occupent les p sommets d'un polygone régulier de rayon R, et où le point S est pris sur la circonférence circonscrite à ce polygone, la distance SG est égale à R et, en vertu d'un théorème précédent, le produit des carrés des distances des points M est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. La formule (9) devient alors

$$(10) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \overline{M_m P_n} = R^{p(p-2)} \prod_{m=1}^{m=p} \overline{M_m S}.$$

En prenant le point G pour origine des coordonnées et la droite GM, pour axe des x , on a

$$(11) \quad F(z) = z^p - R^p$$

et

$$(12) \quad \varphi(z) = z^{p-1} - \frac{R^p}{\sigma}.$$

Le module de σ est égal à R; nous pouvons supposer le point S placé entre M_p et M_1 , et représenter son argument par -2ω , en désignant par ω un angle positif inférieur à $\frac{\pi}{p}$. L'équation (12) devient alors

$$(13) \quad \varphi(z) = z^{p-1} - R^{p-1} e^{2\omega i};$$

elle montre, en supposant $p > 3$, que les conjugués P de S occupent les $(p-1)$ sommets d'un polygone régulier de même rayon R que celui des points M. On trouve un de ces points P et un seul sur chacun des arcs $M_m M_{m+1}$, parmi lesquels ne figure pas l'arc $M_p M_1$ qui contient le point S. Le rayon GP_1 , correspondant au point situé sur l'arc $M_1 M_2$, fait avec GM_1 l'angle $\frac{2\omega}{p-1}$. On a, par suite, aux signes près,

$$(14) \quad \begin{cases} M_m S = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right], \\ M_m P_n = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right], \end{cases}$$

en sorte que la formule (10) devient, en faisant $R = 1$,

$$(15) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right] = \frac{1}{2^{p(p-2)}} \prod_{m=1}^{m=p} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right]$$

On en déduit, pour $\omega = 0$,

$$(16) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} + \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p (p-1)}{2^{p(p-2)}} \frac{1}{\prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \frac{n\pi}{p-1}}.$$

d'où, en tenant compte de la formule (5) dans laquelle on remplace m par n et p par $p-1$,

$$(17) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} - \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{(p-1)(p-2)}}.$$