BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Propriétés d'un système de points dans un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 109-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__109_1>

Propriétés d'un système de points dans un plan;
par M. Félix Lucas.

Considérons dans le plan un système quelconque de p points M, ayant pour affixes les racines de l'équation

$$(1)\qquad F(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = 0.$$

Points centraux. — Les *points centraux* C de ce système sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre, en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse. Ce sont les points racines de l'équation dérivée

$$(2)\qquad F'(z) = p(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)\ldots(z - \gamma_{p-1}) = 0.$$

On a identiquement

$$(3)\qquad F_m(z_m) = \left[\frac{F(z)}{z - z_m}\right]_{z=z_m} = F'(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(4)\qquad F_1(z_1)\,F_2(z_2)\ldots F_p(z_p) = F'(z_1)\,F'(z_2)\ldots F'(z_p).$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$\prod \overline{\mathrm{M}_m\mathrm{M}_n}^2 = p^p \prod \overline{\mathrm{M}_m\mathrm{C}_n},$$

c'est-à-dire que *le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points* M *est égal à* p^p *fois le produit des distances de ces points* M *à leurs points centraux* C.

Dans le cas particulier où les points M occupent les sommets d'un polygone régulier de rayon R, tous les points C occupent le centre de ce polygone; on voit ainsi que *le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets d'un polygone régulier de rayon* R *est égal à* $p^p \mathrm{R}^{p(p-1)}$. Ce théorème s'exprime par la formule trigonométrique

$$(5) \qquad \prod_{m=1}^{m=p-1} \sin\frac{m\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Conjugués d'un point quelconque S. — Considérons maintenant, en présence des points M, un point quelconque S du plan et soit σ son affixe. Les *conjugués* P de ce point, relativement au système M, sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre en présence des attractions des points M ayant l'unité de masse et de la répulsion du point S ayant la masse p. Ces conjugués de S sont les points racines de l'équation du degré $p - 1$

$$p\,\mathrm{F}(z) - (z - \sigma)\,\mathrm{F}'(z) = 0.$$

Le coefficient du terme du plus haut degré, c'est-à-dire le coefficient de z^{p-1}, est $p(\sigma - \gamma)$, en désignant par γ l'affixe du centre des moyennes distances C des points donnés. On peut donc déterminer les affixes des conjugués de S, en égalant à zéro le polynôme

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{p\,\mathrm{F}(z) - (z-\sigma)\,\mathrm{F}'(z)}{p(\sigma-\gamma)} = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\dots(z-\zeta_{p-1}).$$

Cela posé, on a identiquement

$$(7) \qquad p(\sigma-\gamma)\,\varphi(z_m) = (\sigma - z_m)\,\mathrm{F}'(z_m) = (\sigma - z_m)\,\mathrm{F}_m(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(8)\qquad p^p \frac{\varphi(z_1)\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_p)}{F_1(z_1)F_2(z_2)\ldots F_p(z_p)} = \frac{(\sigma - z_1)(\sigma - z_2)\ldots(\sigma - z_p)}{(\sigma - \gamma)^p}.$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$(9)\qquad p^p \frac{\prod \overline{M_m P_n}}{\prod \overline{M_m M_n}^2} = \frac{\prod \overline{SM_m}}{\overline{SG}^p};$$

c'est-à-dire que *le produit des distances des points* M *aux conjugués* P *du point* S, *multiplié par* p^p *et divisé par le produit des carrés des distances des points* M, *est égal au produit des distances du point* S *aux points* M, *divisé par la* $p^{\text{ième}}$ *puissance de la distance de ce point* S *au centre des moyennes distances* G *de ces points* M.

Dans le cas particulier où les points M occupent les p sommets d'un polygone régulier de rayon R, et où le point S est pris sur la circonférence circonscrite à ce polygone, la distance SG est égale a R et, en vertu d'un théorème précédent, le produit des carrés des distances des points M est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. La formule (9) devient alors

$$(10)\qquad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \overline{M_m P_n} = R^{p(p-2)} \prod_{m=1}^{m=p} \overline{M_m S}.$$

En prenant le point G pour origine des coordonnées et la droite GM_1 pour axe des x, on a

$$(11)\qquad F(z) = z^p - R^p$$

et

$$(12)\qquad \varphi(z) = z^{p-1} - \frac{R^p}{\sigma}.$$

Le module de σ est égal à R; nous pouvons supposer le point S placé entre M_p et M_1, et représenter son argument par -2ω, en désignant par ω un angle positif inférieur à $\frac{\pi}{p}$. L'équation (12) devient alors

$$(13)\qquad \varphi(z) = z^{p-1} - R^{p-1} e^{2\omega i};$$

elle montre, en supposant $p > 3$, que les conjugués P de S occupent les $(p-1)$ sommets d'un polygone régulier de même rayon R que celui des points M. On trouve un de ces points P et un seul sur chacun des arcs $M_m M_{m+1}$, parmi lesquels ne figure pas l'arc $M_p M_1$ qui contient le point S. Le rayon GP_1, correspondant au point situé sur l'arc $M_1 M_2$, fait avec GM_1 l'angle $\frac{2\omega}{p-1}\cdot$ On a, par suite, aux signes près,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} M_m S &= 2R\sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p}+\omega\right],\\ M_m P_n &= 2R\sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p}-\frac{(n-1)\pi+\omega}{p-1}\right],\end{aligned}\right.$$

en sorte que la formule (10) devient, en faisant $R = 1$,

$$(15)\qquad \prod_{m=1}^{m=p}\prod_{n=1}^{n=p-1}\sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p}-\frac{(n-1)\pi+\omega}{p-1}\right]=\frac{1}{2^{p(p-2)}}\prod_{m=1}^{m=p}\sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p}+\omega\right]$$

On en déduit, pour $\omega = 0$,

$$(16)\qquad \prod_{m=1}^{m=p-1}\prod_{n=1}^{n=p-2}\sin\left(\frac{m\pi}{p}+\frac{n\pi}{p-1}\right)=\frac{(-1)^p(p-1)}{2^{p(p-2)}}\,\frac{1}{\displaystyle\prod_{n=1}^{n=p-2}\sin\frac{n\pi}{p-1}}.$$

d'où, en tenant compte de la formule (5) dans laquelle on remplace m par n et p par $p-1$,

$$(17)\qquad \prod_{m=1}^{m=p-1}\prod_{n=1}^{n=p-2}\sin\left(\frac{m\pi}{p}-\frac{n\pi}{p-1}\right)=\frac{(-1)^p}{2^{(p-1)(p-2)}}.$$