BULLETIN DE LA S. M. F.

G. CELLÉRIER

Sur les principes généraux de la thermodynamique et leur application aux corps élastiques

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 26-43
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__26_0>

Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques;

par M. Gustave Cellérier.

Les recherches suivantes ont pour but de déterminer les équations générales permettant d'introduire, dans l'étude des corps élastiques, les termes d'ordres supérieurs au premier par rapport aux grandeurs des déformations. Les premiers paragraphes sont consacrés à quelques théorèmes relatifs à l'emploi des principes thermiques, en vue de préciser le nombre et le choix des variables indépendantes, ainsi que de connaître avec certitude le degré de généralité que l'on doit attribuer aux équations thermiques.

Nous cherchons ensuite la valeur du travail infinitésimal dégagé par l'élément de volume d'un corps parfaitement élastique, quand il passe d'un état déjà déformé à un état infiniment voisin. Et, en appliquant à cette expression les considérations préliminaires, nous pourrons déterminer, pour cette famille de corps, la forme la plus générale de la fonction caractéristique, des valeurs des pressions, et par suite des équations de l'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène inégalement déformé en ses divers points, sans restriction aucune sur l'ordre de grandeur des déformations.

Comme exemple d'utilité possible de ces équations, nous citerons leur application éventuelle à la Chronométrie, science dont les progrès incessants exigent de jour en jour des moyens plus précis.

1. — Principes fondamentaux.

Principe de l'équivalence. — Appelons dQ la quantité de chaleur reçue par un corps pendant une modification infinitésimale de son état, dL le travail dégagé, et A la constante numérique de l'équivalent calorifique du travail; considérons, pour ce corps, un *cycle fermé,* c'est-à-dire une série de modifications successives à la fin desquelles le corps se retrouve identiquement dans l'état où il était primitivement; le principe de l'équivalence s'exprime analytiquement en écrivant

$$\int (dQ - A\,dL) = 0. \tag{1}$$

où l'intégrale est étendue à toutes les évolutions successives du cycle que nous venons de définir.

Cette équation n'existe d'ailleurs que si la chaleur et le travail sont seuls en présence.

Principe de l'énergie intérieure. — Ce principe est une conséquence du précédent, participant de la sorte à sa généralité, indépendamment de toute autre conception. L'existence de l'énergie intérieure résulte des deux théorèmes suivants :

1° *L'expression* $dQ - A\,dL$ *a pour terme principal un polynôme différentiel de la forme* $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots + R\,dr$, $x, y, z, \ldots, r$ étant les variables indépendantes qui déterminent l'état du corps.

En effet, nous pouvons poser, entre deux états voisins,

$$dQ - A\,dL = f(x, y, z, \ldots, r, dx, dy, dz, \ldots, dr),$$

f convergeant vers une fonction homogène du premier ordre en dx, dy, etc. Formons un cycle infinitésimal, à partir de l'état $x, y, \ldots, r$, dans lequel la première modification porte sur toutes les variables, qui deviennent $x + dx$, $y + dy$, $\ldots$, $r + dr$, tandis que chacune des modifications suivantes n'affecte qu'une seule des lettres en lui rendant sa valeur primitive; ce cycle sera fermé; les valeurs successives de f seront

$$\begin{aligned}
&f(x, y, \ldots, r, dx, dy, \ldots, dr),\\
&f(x + dx, y + dy, \ldots, r + dr, -dx, 0, 0, \ldots, 0),\\
&f(x, y + dy, \ldots, r + dr, 0, -dy, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&f(x, y, \ldots, r + dr, 0, 0, \ldots, -dr);
\end{aligned}$$

et, en appliquant à ce cycle l'équation (1), négligeant les termes du deuxième ordre, on aura

$$\begin{aligned}
f(x, y, \ldots, r, dx, dy, \ldots, dr) + f(x, y, \ldots, r, -dx, 0, \ldots, 0) + \ldots\\
+ f(x, y, \ldots, r, 0, 0, \ldots, -dr) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à la forme énoncée

$$f(x, y, \ldots, r, dx, dy, \ldots, dr) = X\,dx + Y\,dy + \ldots + R\,dr,$$

$X, Y, \ldots, R$ désignant des fonctions finies des variables.

2° *Sous cette dernière forme,* $dQ - A\,dL$ *est la différen-*

tielle exacte d'une fonction de $x, y, \ldots, r$, que l'on désignera par AU, U étant l'énergie intérieure du corps.

Il suffit de prouver que $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, car on démontrerait de même les relations analogues pour les autres lettres. Faisant donc varier x et y seuls, traçant les points dont les coordonnées sont x, y, leur lieu, pour un cycle fermé, est une aire fermée, que nous pouvons prendre de dimensions infinitésimales; soit un point intérieur fixe x_0, y_0, et posons $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$; nous aurons, pour ce point de la courbe, en négligeant le troisième ordre,

$$X\,dx + Y\,dy = \left(X_0 + \frac{\partial X_0}{\partial x}\xi + \frac{\partial X_0}{\partial y}\eta\right)d\xi + \left(Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial x}\xi + \frac{\partial Y_0}{\partial y}\eta\right)d\eta,$$

dont l'intégrale, en application de l'équation (1), se réduit à

$$\frac{\partial X_0}{\partial y}\int \eta\,d\xi + \frac{\partial Y_0}{\partial x}\int \xi\,d\eta = 0.$$

Or $\int \eta\,d\xi$, $\int \xi\,d\eta$ sont, de signes contraires, égaux à l'aire infinitésimale, qui n'est pas nécessairement nulle; il en résulte, pour le point x_0, y_0, la relation qu'il fallait prouver

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Conformément à la désignation ci-dessus, nous écrirons donc

$$(2) \qquad dQ = A(dU + dL)$$

où dU seul représente une différentielle.

Principe de Carnot. — Ce principe n'existe que dans les cas où l'on peut regarder comme *réversibles* les modifications thermiques d'un corps. Il fait survenir l'existence d'une fonction toujours croissante avec la température, quantité que l'on adopte pour exprimer la mesure T de la température. Sa démonstration est d'ailleurs faite sur des bases incontestables, indépendamment du nombre ou de la nature des variables indépendantes.

Le cycle de Carnot est parfois appelé *cycle parfait,* ou *cycle de rendement maximum;* et quand le principe d'un moteur thermique réalise ce cycle, on regarde la machine comme théoriquement parfaite. Telle est l'application d'un corollaire soit du principe de

Carnot, soit de la méthode même de sa démonstration, corollaire qui peut s'exprimer ainsi : *Si, pour un cycle réversible fermé, la température d'un corps est comprise entre les extrêmes* T' *et* T'', *le rendement de ce cycle ne peut être supérieur au rapport* $\frac{T''-T'}{T''}$, le cycle étant parcouru dans le sens qui rend positif le travail résiduel.

2. — Théorèmes fondamentaux pour les changements réversibles.

A. — *Pour des modifications réversibles, la quantité* dQ *a pour terme principal un polynôme différentiel linéaire, tel que* $X\,dx + Y\,dy + \ldots + R\,dr$; dL *par suite a la même forme.*

Cette propriété résulte du corollaire énoncé ci-dessus, appliqué à un cycle infinitésimal; pour un tel cycle, $\Sigma\,dQ$ représente le travail, tandis que la chaleur fournie au corps peut s'exprimer par $\Sigma\,dQ'$; on a alors $\frac{\Sigma\,dQ}{\Sigma\,dQ'} < \frac{T''-T'}{T''}$; or, ici, $T''-T'$ est infinitésimal du premier ordre, $\Sigma\,dQ'$ également, de sorte que $\Sigma\,dQ$ ne peut être que du deuxième ordre au moins; en posant

$$dQ = f(x, y, \ldots, r, dx, dy, \ldots, dr),$$

on démontrera, comme au n° 1, qu'aux termes près du deuxième ordre, dQ a la forme énoncée, et, à cause de l'équation (2), dL également.

B. — *L'expression* $\frac{dQ}{T}$ *est une différentielle exacte.*

D'après le théorème précédent, on a la forme

$$\frac{dQ}{T} = \frac{X\,dx + Y\,dy + \ldots + R\,dr}{T}.$$

Concevons un cycle de Carnot où x et y varient seules; si T dépend de ces deux lettres ou de l'une d'entre elles, on peut démontrer le théorème comme dans le cas d'un fluide, où il n'y a que deux variables, et l'on a

$$\frac{\partial\left(\frac{X}{T}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{Y}{T}\right)}{\partial x}.$$

Si au contraire T est indépendant à la fois de x et y, pour tout cycle où z, ..., r restent constants, T ne varie pas ; le rendement de ce cycle ne peut être supérieur à zéro, et par suite

$$\int (X\,dx + Y\,dy) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

et ce qui revient au même ici

$$\frac{\partial\left(\frac{X}{T}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{Y}{T}\right)}{\partial x}.$$

Ce résultat subsiste donc dans tous les cas, et l'ensemble des relations analogues en z, ..., r justifie l'énoncé du théorème.

Nous écrirons donc

$$(3) \qquad dQ = AT\,d\omega, \qquad dU + dL = T\,d\omega,$$

$d\omega$ étant la différentielle d'une fonction.

C. — *Si le travail extérieur* dL *est exprimé par le polynôme* $X\,dx + Y\,dy + \ldots + R\,dr$, *les lettres* x, y, z, ..., r *ne peuvent à elles seules déterminer l'état du corps.*

En effet, la forme énoncée de dL résulte d'une forme primitive telle que $\Sigma P\,ds$, où les quantités P sont des projections de forces, et les quantités ds des arcs élémentaires décrits par les points de la surface du corps ; si le corps ne subit aucune déformation, toutes les quantités ds sont nulles ; et comme un des termes tels que $X\,dx$ provient du groupement d'un certain nombre de termes $P\,ds$, dx est nul dans le même cas, ainsi que dy, dz, ..., dr. Dans l'hypothèse contraire à l'énoncé, dT serait nul aussi. Or on sait que l'on peut chauffer ou refroidir un corps sans qu'il subisse aucune déformation superficielle. Il existe donc d'autres variables indépendantes que x, y, ..., r, pour déterminer soit la fonction T, soit l'état du corps.

D. — *Si* dL *est exprimé par un polynôme de* n *termes, le nombre des variables peut être réduit à* $n+1$.

On posera

$$(4)\qquad \omega T - U = \theta, \qquad \text{d'où} \qquad dL = d\theta - \omega\, dT,$$

θ étant une fonction dite *caractéristique*. Considérant x, y, z, ..., r, T comme variables indépendantes, et appelant α, β, γ, ... les autres, cette nouvelle forme de dL conduit aux relations

$$(5)\quad X = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \ldots, \quad R = \frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial\theta}{\partial T}, \quad o = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \ldots,$$

et l'on voit que θ, et par suite ω, X, ..., R, U sont indépendants de α, β, γ, ... On obtient donc le résultat proposé en considérant θ comme fonction de x, y, z, ..., r, T.

E. — *Les quantités* T, θ, ω, U *ne peuvent dépendre que de variables représentées dans l'expression du travail extérieur.*

Si α est une variable non représentée dans dL, elle ne saurait être x, y, ... ou r; c'est donc T qui pourrait en dépendre; mais de ce que $\frac{\partial X}{\partial\alpha} = o$, il résulte $\frac{\partial T}{\partial\alpha} = o$, à cause des équations (5); cette lettre ne peut donc exister nulle part.

De ce théorème il est aisé de déduire le corollaire suivant :

Si l'expression de dL *peut être ramenée à la forme* $\mathfrak{L}\,d\lambda + \mathfrak{M}\,d\mu + \mathfrak{N}\,d\nu + \ldots + \mathfrak{R}\,d\rho$, *où* λ, μ, ν, ..., ρ *sont des fonctions de* x, y, ..., r, *en nombre inférieur à celui de ces dernières variables, et où* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ..., $\mathfrak{R}$ *sont des fonctions de* λ, μ, ν, ..., ρ, *les quantités* θ, ... *seront des fonctions de* λ, μ, ν, ..., ρ, T, *sans dépendre autrement de* x, y, z, ..., r.

D'après ce qui précède les équations thermiques peuvent s'écrire

$$(6)\qquad dL = \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial r}\,dr,$$

$$(7)\qquad \omega = \frac{\partial\theta}{\partial T}, \qquad U = T\frac{\partial\theta}{\partial T} - \theta, \qquad \theta = f(x, y, z, \ldots, r, T),$$

$$(8)\quad dQ = AT\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial T}\,dx + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial T}\,dy + \ldots + \frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial T}\,dr + \frac{\partial^2\theta}{\partial T^2}\,dT\right).$$

Dans ce qui suit, nous conserverons aux seules lettres A, Q, L, U, T, θ leur signification actuelle.

3. — Travail élémentaire pour les corps élastiques.

On peut fixer, au point de vue physique, l'état d'un corps en le comparant à un état initial déterminé. Soient donc x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point matériel dans cet état initial; la position actuelle du même point, que nous désignerons par x, y, z, peut être représentée par diverses équations entre x, y, z, x_0, y_0, z_0 et un certain nombre de paramètres α, β, ... indépendants de x_0, y_0, z_0; on pourra écrire

$$(9) \qquad \begin{cases} x = F_1(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \ldots), \\ y = F_2(x_0, y_0, \ldots), \\ z = F_3(x_0, y_0, \ldots). \end{cases}$$

Si le corps se déforme, ce sont les paramètres α, β, ... qu'il faut faire varier dans ces équations, et non x_0, y_0, z_0; de sorte que les mouvements élémentaires des points sont exprimés par

$$(a) \qquad \delta x = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial \beta}\delta\beta + \ldots \qquad \text{ou} \qquad \delta x = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\delta\alpha, \qquad \ldots.$$

Supposant donc x_0, y_0, z_0 éliminés entre ces six équations (9) et (a), l'on exprimera le résultat de cette élimination sous la forme

$$(b) \qquad \delta x = f_1(x, y, z), \qquad \delta y = f_2(x, y, z), \qquad \delta z = f_3(x, y, z),$$

où les fonctions f_1, f_2, f_3 contiennent, outre x, y, z, les lettres α, β, γ, ..., $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, ...

Il importe d'exprimer ici la valeur des dérivées de ces trois fonctions par rapport à x, y, z. Identifiant (a) et (b), on a

$$f_1 = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}\delta\alpha, \qquad f_2 = \sum \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\delta\alpha, \qquad \ldots,$$

d'où, regardant x_0, y_0, z_0 comme fonctions de x, y, z,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sum \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha\, \partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha\, \partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha\, \partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)\delta\alpha,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\right) + \frac{\partial y_0}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial z_0}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_0}\right).$$

Nous représenterons les neuf dérivées des fonctions F_1, F_2, F_3

par les notations

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\varphi_x = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_0}, & \varphi_y = \dfrac{\partial F_1}{\partial y_0}, & \varphi_z = \dfrac{\partial F_1}{\partial z_0},\\[2mm]
\psi_x = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_0}, & \psi_y = \dfrac{\partial F_2}{\partial y_0}, & \psi_z = \dfrac{\partial F_2}{\partial z_0},\\[2mm]
\chi_x = \dfrac{\partial F_3}{\partial x_0}, & \chi_y = \dfrac{\partial F_3}{\partial y_0}, & \chi_z = \dfrac{\partial F_3}{\partial z_0},
\end{cases}
$$

de sorte qu'on écrira

$$
(c)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x}\,\delta\varphi_x + \frac{\partial y_0}{\partial x}\,\delta\varphi_y + \frac{\partial z_0}{\partial x}\,\delta\varphi_z.
$$

Différentiant par rapport à x les équations (9), on obtient

$$
1 = \varphi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \varphi_z \frac{\partial z_0}{\partial x},
$$

$$
0 = \psi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \psi_z \frac{\partial z_0}{\partial x} = \chi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \chi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \chi_z \frac{\partial z_0}{\partial x};
$$

d'où, posant pour abréger

$$
(11)\qquad \begin{cases}
\Delta = \varphi_x\psi_y\chi_z + \varphi_y\psi_z\chi_x + \varphi_z\psi_x\chi_y\\
\qquad - \varphi_x\psi_z\chi_y - \varphi_y\psi_x\chi_z - \varphi_z\psi_y\chi_x,
\end{cases}
$$

on tire

$$
(12)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y}, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z}.
$$

On obtient donc en définitive pour la valeur (c) et ses analogues

$$
(13)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}\delta\varphi_x + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y}\delta\varphi_y + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z}\delta\varphi_z\right),\\[3mm]
\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial \Delta}{\partial \psi_x}\delta\varphi_x + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \psi_y}\delta\varphi_y + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \psi_z}\delta\varphi_z\right),\\[3mm]
\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}\delta\psi_x + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y}\delta\psi_y + \dfrac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z}\delta\psi_z\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

On peut remarquer que les quantités φ_x, φ_y, $\ldots$, χ_z représentent les composantes de la dilatation du corps, de l'état initial à l'état actuel. Et si l'on désigne par υ_0, υ le volume spécifique pour ces deux états, on a tout d'abord

$$
\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\delta\Delta}{\Delta},
$$

d'où, par intégration,

(14) $$\upsilon = \upsilon_0 \Delta,$$

de sorte que Δ représente la dilatation en volume.

Considérons un élément de volume du corps, de poids ε, limité par une surface fermée ω. Soient x, y, z les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de ce volume; et $d\omega$ un élément superficiel dont les coordonnées actuelles sont $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, et dont la normale extérieure fait avec les axes de coordonnées des angles de cosinus λ, μ, ν. En appelant $p_{\omega x}$, $p_{\omega y}$, $p_{\omega z}$ les composantes de la pression sur $d\omega$, une déformation infinitésimale développe sur cet élément superficiel un travail extérieur égal à

(d) $$(p_{\omega x}\,\delta\xi + p_{\omega y}\,\delta\eta + p_{\omega z}\,\delta\zeta)\,d\omega.$$

L'intégrale de cette expression, étendue à toute la surface ω et divisée par ε, exprimera la valeur de dL, s'il n'y a pas d'autres forces extérieures.

On a du reste, ξ, η, ζ étant infinitésimaux,

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= f_1(x,y,z) + \xi\frac{\partial f_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial f_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \ldots,\\
\delta\eta &= f_2 + \xi\frac{\partial f_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial f_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots\\
\delta\zeta &= f_3 + \xi\frac{\partial f_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial f_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f_3}{\partial z} + \ldots
\end{aligned}$$

et, désignant d'ailleurs par p_{xx}, p_{xy} ..., p_{zz} les composantes de la pression au point x, y, z, nous aurons encore

$$p_{\omega x} = \lambda(p_{xx} + dp_{xx}) + \mu(p_{xy} + dp_{xy}) + \nu(p_{xz} + dp_{xz}), \qquad \ldots,$$

en faisant

$$dp_{xx} = \xi\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \eta\frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + \zeta\frac{\partial p_{xx}}{\partial z} + \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} + \ldots,$$

....

La quantité dL à obtenir étant une limite se rapportant à l'unité de poids d'un corps qui serait constitué identiquement à l'élément infinitésimal situé au point x, y, z, cette quantité est de même ordre que f_1, f_2, f_3 et leurs dérivées. Comme du reste la valeur de ε, qui doit diviser l'intégrale de l'expression (d), est du troisième degré par rapport à ξ, η, ζ, il sera inutile de conserver, dans (d), les termes de degré supérieur au troisième. De la sorte, on ne gardera, dans le terme $p_{\omega x}\,\delta\xi\,d\omega$, que l'expression

$$(e)\quad \begin{cases} (\lambda p_{xx}+\mu p_{xy}+\nu p_{xz})\left(f_1+\xi\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\zeta\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right)d\omega \\ \quad +(\lambda\, dp_{xx}+\mu\, dp_{xy}+\nu\, dp_{xz})f_1\, d\omega, \end{cases}$$

où dp_{xx}, ... seront remplacés par leurs termes du premier degré.

Pour l'évaluation d'intégrales telles que

$$(f)\qquad \int\lambda\, d\omega,\quad \int\mu\, d\omega,\quad \int\lambda\xi\, d\omega,\quad \int\lambda\eta\, d\omega,\quad \ldots,$$

l'on décompose ω en menant une infinité de prismes parallèles à l'un des axes de coordonnées, Ox par exemple, ces prismes ayant des dimensions transversales très petites par rapport à celles de ω. L'un quelconque d'entre eux, de section $d\omega'$, rencontre la surface fermée ω en un nombre pair de points, où λ sera alternativement positif et négatif; comme, au signe près, en ces points, $\lambda\, d\omega$ vaut $d\omega'$, et que η, ζ restent les mêmes, on a pour ces points

$$\Sigma\lambda\, d\omega = 0,\qquad \Sigma\lambda\eta\, d\omega = 0,\qquad \Sigma\lambda\zeta\, d\omega = 0,$$

tandis que $\Sigma\lambda\xi\, d\omega$ est la partie du volume du prisme commune au volume ε. Il en résulte que les seules intégrales (f) qui ne soient pas nulles sont

$$\int\lambda\xi\, d\omega,\qquad \int\mu\eta\, d\omega,\qquad \int\nu\zeta\, d\omega,$$

dont la valeur commune est égale au volume de l'élément, c'est-à-dire à $\varepsilon\upsilon$, υ étant le volume spécifique au point x, y, z.

On obtient alors, pour l'intégrale de l'expression (e)

$$(g)\qquad \varepsilon\upsilon\left[p_{xx}\frac{\partial f_1}{\partial x}+p_{xy}\frac{\partial f_1}{\partial y}+p_{xz}\frac{\partial f_1}{\partial z}+f_1\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right)\right].$$

Or on sait que les pressions sont soumises aux équations

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z}=X, \\ \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{yz}}{\partial z}=Y, \\ \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}=Z, \end{cases}$$

où X, Y, Z représentent les forces étrangères, y compris l'inertie, rapportées à l'unité de volume.

Le dernier terme de l'expression (g) vaut donc $\varepsilon \upsilon X f_1$, ou $\varepsilon \upsilon X\, \delta x$, un des termes du travail des forces extérieures. L'ensemble des termes tels que (g) représentant le travail des pressions, il faut retrancher le travail des forces extérieures, qui est reçu par le corps, pour obtenir le travail élémentaire $d\mathrm{L}$ dégagé. Ce qui revient à faire abstraction de X, Y, Z dans les expressions (g). Divisant ces dernières par ε, on aura alors

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathrm{L} = \upsilon \Big[& p_{xx} \frac{\partial f_1}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial f_2}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial f_3}{\partial z} + p_{yz}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) \\ & + p_{xz}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + p_{xy}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\Big], \end{aligned} \right.$$

expression où les dérivées de f_1, f_2, f_3 doivent être remplacées par leurs valeurs (13).

4. — Fonction caractéristique.

En faisant la substitution que nous venons d'indiquer, et remplaçant de plus $\frac{\upsilon}{\Delta}$ par la constante υ_0, nous aurons

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathrm{L} = \upsilon_0 \Big[& \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_x}\right) \delta\varphi_x \\ & + \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_y}\right) \delta\varphi_y \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \left(p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + p_{yz} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} + p_{zz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_z}\right) \delta\chi_z \Big]. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $\delta\varphi_x$, ... sont des variations relatives à un changement de l'état du corps, auxquelles on peut identifier celles désignées au n° 2 par dx, dy, ... Par suite l'équation (6) doit être identifiée à l'équation (17); et il résulte des considérations du n° 2 que la fonction caractéristique θ dépend de dix variables, qui sont φ_x, φ_y, φ_z, ..., χ_z, T, ainsi que les relations

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} &= \upsilon_0 \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_x}\right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} &= \upsilon_0 \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_y}\right), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \chi_z} &= \upsilon_0 \left(p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + p_{yz} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} + p_{zz} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_z}\right). \end{aligned} \right.$$

De ces neuf équations, on peut tirer les valeurs des six quantités $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$, et il restera trois équations de condition entre les dérivées de θ et les neuf variables $\varphi_x, \ldots, \chi_z$. Tenant compte des identités telles que

$$\varphi_x \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + \varphi_y \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \varphi_z \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} = \Delta, \qquad \varphi_x \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} + \varphi_y \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} + \varphi_z \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} = 0, \qquad \text{etc.},$$

on aura aisément

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \upsilon p_{xx} &= \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z}, \\ \upsilon p_{yy} &= \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \upsilon p_{xy} &= \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \\ &= \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

La double valeur de p_{xy} donne lieu à l'équation de condition

$$(20) \quad \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} - \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} - \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} - \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z} = 0,$$

et il est aisé de voir qu'elle est satisfaite par six valeurs particulières de θ, ayant pour types

$$\varphi_u^2 + \psi_u^2, \quad \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v,$$

et aussi bien par

$$\varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, \quad \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v,$$

forme permutable qui s'applique alors à l'ensemble des trois équations telles que (20). La forme la plus générale de θ est donc une fonction de T et des six quantités

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_x^2 + \psi_x^2 + \chi_x^2, \\ \psi &= \varphi_y^2 + \psi_y^2 + \chi_y^2, \\ \chi &= \varphi_z^2 + \psi_z^2 + \chi_z^2, \\ \varphi' &= \varphi_y \varphi_z + \psi_y \psi_z + \chi_y \chi_z, \\ \psi' &= \varphi_x \varphi_z + \psi_x \psi_z + \chi_x \chi_z, \\ \chi' &= \varphi_x \varphi_y + \psi_x \psi_y + \chi_x \chi_y; \end{aligned} \right.$$

et l'on pourra écrire

$$(22) \quad dL = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \delta \psi + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial \chi'} \delta \chi'.$$

Pour passer du premier système au second, on aura les formules de transformation telles que

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x} &= 2\varphi_x\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + \varphi_y\frac{\partial\theta}{\partial\chi'} + \varphi_z\frac{\partial\theta}{\partial\psi'},\\ \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_y} &= \varphi_x\frac{\partial\theta}{\partial\chi'} + 2\varphi_y\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \varphi_z\frac{\partial\theta}{\partial\varphi'},\\ \frac{\partial\theta}{\partial\psi_x} &= 2\psi_x\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + \psi_y\frac{\partial\theta}{\partial\chi'} + \psi_z\frac{\partial\theta}{\partial\psi'},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

et inversement

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} &= \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_x}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_x} + \frac{\partial\theta}{\partial\chi_x}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_x}\right),\\ \frac{\partial\theta}{\partial\varphi'} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_y}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_z} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_y}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_z} + \frac{\partial\theta}{\partial\chi_y}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_z}\right)\\ &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_z}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_y} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_z}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_y} + \frac{\partial\theta}{\partial\chi_z}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_y}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Pour représenter géométriquement la déformation, on conçoit, dans l'état initial, une sphère infinitésimale qui devient un ellipsoïde dans l'état actuel; amplifiant leurs dimensions à une échelle telle que le rayon de la sphère soit représenté par l'unité de longueur, les trois rayons M_0A_0, M_0B_0, M_0C_0 parallèles aux axes de coordonnées deviennent trois demi-diamètres conjugués MA, MB, MC de l'ellipsoïde, les points A, B, C ayant, relativement à M, des coordonnées

$$A:\varphi_x,\ \psi_x,\ \chi_x;\qquad B:\varphi_y,\ \psi_y,\ \chi_y;\qquad C:\varphi_z,\ \psi_z,\ \chi_z;$$

de sorte que les six variables φ, ψ, ..., χ' dépendent des éléments du tétraèdre MABC

$$\varphi = \overline{MA}^2,\qquad \psi = \overline{MB}^2,\qquad \chi = \overline{MC}^2,\qquad \varphi' = \overline{MB}.\overline{MC}\cos\widehat{BMC},\qquad \ldots.$$

On peut tirer de là tous les angles du trièdre, et l'on trouve

$$\cos\widehat{BMC} = \frac{\varphi'}{\sqrt{\psi\chi}},\qquad \sin\widehat{BMC} = \sqrt{\frac{\varphi_1}{\psi\chi}},$$

où

$$\varphi_1 = \psi\chi - \varphi'^2,\qquad \ldots,$$

et de même, pour le dièdre d'arête MA

$$\sin \widehat{MA} = \Delta\sqrt{\frac{\varphi}{\psi_1\chi_1}}, \qquad \frac{\sin \widehat{MA}}{\sin \widehat{BMC}} = \Delta\sqrt{\frac{\varphi\psi\chi}{\varphi_1\psi_1\chi_1}},$$

d'après l'identité

$$\Delta^2 = \varphi\psi\chi + 2\varphi'\psi'\chi' - \varphi\varphi'^2 - \psi\psi'^2 - \chi\chi'^2.$$

Les axes de symétrie de l'ellipsoïde proviennent de trois diamètres rectangulaires de la sphère initiale. Soient ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées du sommet de l'un de ces diamètres, prises relativement à M_0; ξ, η, ζ les valeurs actuelles de ces coordonnées relatives, pour le sommet correspondant de l'ellipsoïde; $\sqrt{\sigma}$ la longueur du demi-axe correspondant; on aura

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma,$$
$$\varphi\xi_0 + \chi'\eta_0 + \psi'\zeta_0 = \sigma\xi_0,$$
$$\chi'\xi_0 + \psi\eta_0 + \varphi'\zeta_0 = \sigma\eta_0,$$
$$\psi'\xi_0 + \varphi'\eta_0 + \chi\zeta_0 = \sigma\zeta_0,$$

et, posant

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda = \varphi + \psi + \chi, \\ \mu = \psi\chi + \varphi\chi + \varphi\psi - \varphi'^2 - \psi'^2 - \chi'^2, \\ \nu = \varphi\psi\chi + 2\varphi'\psi'\chi' - \varphi\varphi'^2 - \psi\psi'^2 - \chi\chi'^2, \end{cases}$$

les trois valeurs de σ résultent de l'équation

$$\sigma^3 - \lambda\sigma^2 + \mu\sigma - \nu = 0.$$

On a encore les relations

$$\xi\varphi_x + \eta\psi_x + \zeta\chi_x = \sigma\xi_0,$$
$$\xi\varphi_y + \eta\psi_y + \zeta\chi_y = \sigma\eta_0,$$
$$\xi\varphi_z + \eta\psi_z + \zeta\chi_z = \sigma\zeta_0.$$

On peut aussi donner une interprétation géométrique aux dérivées de la fonction caractéristique.

Les angles que fait le plan BMC avec les plans coordonnés ont pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_x},$$

et, au moyen des équations (18), on trouve que

$$\frac{1}{\upsilon_0\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}, \quad \frac{1}{\upsilon_0\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_x}, \quad \frac{1}{\upsilon_0\sqrt{\varphi_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\chi_x}$$

sont les composantes de la pression sur le plan BMC; désignant par P_u la force qui agit ainsi sur le parallélogramme BMC, on aura, pour ses composantes,

$$P_{ux} = \frac{1}{\upsilon_0}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}, \qquad P_{uy} = \frac{1}{\upsilon_0}\frac{\partial\theta}{\partial\psi_x}, \qquad P_{uz} = \frac{1}{\upsilon_0}\frac{\partial\theta}{\partial\chi_x},$$

et si v, w représentent les parallélogrammes CMA, AMB, on a de même

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_y} = \upsilon_0 P_{vx}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\psi_y} = \upsilon_0 P_{vy}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\chi_z} = \upsilon_0 P_{wz};$$

tandis qu'en décomposant lés pressions normalement aux trois plans obliques, on obtient aisément

$$p_{uu} = \frac{2\Delta}{\upsilon_0\varphi_1}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \qquad p_{uv} = \frac{\Delta}{\upsilon_0\sqrt{\varphi_1\psi_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\chi'}, \qquad p_{uw} = \frac{\Delta}{\upsilon_0\sqrt{\varphi_1\chi_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\psi'};$$

on retrouve ici $p_{uv} = p_{vu}$, ce qui existe d'ailleurs pour un système d'axes quelconques.

5. — Équations d'équilibre.

Quand les divers points d'un corps élastique sont soumis à des pressions, dilatations ou températures différentes, les quantités φ_x, φ_y, ..., χ_z varient d'un point à l'autre. Toutefois, si le corps reste physiquement homogène, on doit regarder, pour tous les points, la fonction θ comme invariable de forme. Dans ce cas, les équations d'équilibre peuvent subir une transformation.

En général, si S est une fonction quelconque de x, y, z, on l'exprimera, au moyen des relations (12), en fonction de x_0, y_0, z_0, par les identités telles que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x}\frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_y}\frac{\partial S}{\partial y_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_z}\frac{\partial S}{\partial z_0}\right).$$

La première des équations (15) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}\Delta X = {} & \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\psi_x}\frac{\partial p_{xy}}{\partial x_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\chi_x}\frac{\partial p_{xz}}{\partial x_0}\right) \\ & + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_y}\frac{d p_{xx}}{\partial y_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\psi_y}\frac{\partial p_{xy}}{\partial y_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\chi_y}\frac{\partial p_{xz}}{\partial y_0}\right) \\ & + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_z}\frac{\partial p_{xx}}{\partial z_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\psi_z}\frac{\partial p_{xy}}{\partial z_0} + \frac{\partial\Delta}{\partial\chi_z}\frac{\partial p_{xz}}{\partial z_0}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant dans le premier membre Δ par $\frac{\upsilon}{\upsilon_0}$ et en tenant compte des équations (18), on obtient

$$\upsilon X = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_z}\right) - \upsilon_0(\mathrm{G}p_{xx} + \mathrm{H}p_{xy} + \mathrm{K}p_{xz}),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_z}\right),\\
\mathrm{H} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_z}\right),\\
\mathrm{K} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_z}\right).
\end{aligned}$$

Or, en substituant

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x} = \psi_y\chi_z - \psi_z\chi_y, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_y} = \psi_z\chi_x - \psi_x\chi_z, \qquad \text{etc.},$$

et en tenant compte des équations (10), il est aisé de voir que G, H, K sont identiquement nuls; de sorte que les équations d'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène seront les suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\upsilon X &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_z}\right),\\
\upsilon Y &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi_z}\right),\\
\upsilon Z &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\chi_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\chi_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\chi_z}\right).
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, il faudrait, par exemple, remplacer le terme $\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}\right)$ par l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\mathrm{T}}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x_0} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x^2}\frac{\partial^2\mathrm{F}_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\varphi_y}\frac{\partial^2\mathrm{F}_1}{\partial x_0\,\partial y_0} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\varphi_z}\frac{\partial^2\mathrm{F}_1}{\partial x_0\,\partial z_0}\\
&\quad + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\psi_x}\frac{\partial^2\mathrm{F}_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\psi_y}\frac{\partial^2\mathrm{F}_2}{\partial x_0\,\partial y_0} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\psi_z}\frac{\partial^2\mathrm{F}_2}{\partial x_0\,\partial z_0}\\
&\quad + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\chi_x}\frac{\partial^2\mathrm{F}_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\chi_y}\frac{\partial^2\mathrm{F}_3}{\partial x_0\,\partial y_0} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial\chi_z}\frac{\partial^2\mathrm{F}_3}{\partial x_0\,\partial z_0},
\end{aligned}$$

le premier terme étant relatif au cas d'une température variable.

Si le corps est en mouvement, l'on remplacera de plus υX, υY,

υZ respectivement par

$$\frac{1}{g}\left(R_x - \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}\right), \quad \frac{1}{g}\left(R_y - \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}\right), \quad \frac{1}{g}\left(R_z - \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2}\right),$$

R_x, R_y, R_z étant les composantes de la résultante des forces extérieures agissant sur l'unité de masse, g la constante de la pesanteur, et t le temps.

Il faudrait encore introduire, dans les équations (26), les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\theta}{\partial\psi}$, ..., au lieu de $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_x}$, ..., $\frac{\partial\theta}{\partial\chi_z}$.

Les quantités $\frac{\partial T}{\partial x_0}$, $\frac{\partial T}{\partial y_0}$, $\frac{\partial T}{\partial z_0}$ dépendent de la manière dont la chaleur est distribuée à l'intérieur du corps. D'ailleurs l'équation (8) devient, pour le cas présent,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} dQ &= AT\,\delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right) \\ &= AT\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_x\,\partial T}\delta\varphi_x + \ldots + \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi_z\,\partial T}\delta\chi_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial T^2}\delta T\right) \\ &= AT\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial T}\delta\varphi + \ldots + \frac{\partial^2\theta}{\partial\chi'\,\partial T}\delta\chi' + \frac{\partial^2\theta}{\partial T^2}\delta T\right). \end{aligned}\right.$$

La quantité dQ comprend ici deux parties : l'une est la chaleur fournie ou soustraite aux divers points du corps par des causes extérieures; l'autre provient des phénomènes de conductibilité, par lesquels chaque élément du corps subit une action thermique des éléments avoisinants. Voici deux exemples de cas où l'on peut faire abstraction de la conductibilité.

Si les modifications du corps sont lentes et qu'il possède une température uniforme à chaque instant en tous ses points, les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x_0}$, $\frac{\partial T}{\partial y_0}$, $\frac{\partial T}{\partial z_0}$ sont nulles, et les termes qui en dépendent sont détruits dans les équations (26), qui se réduisent ainsi à un système de trois équations à trois inconnues F_1, F_2, F_3.

Si, au contraire, le corps subit une déformation très rapide, pendant un temps assez court pour que la conductibilité puisse être négligeable, et que d'ailleurs cette déformation soit adiabatique en tous points, on aura $dQ = 0$, et par suite

$$\delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right) = 0.$$

Si donc au commencement de la déformation $\frac{\partial \theta}{\partial T}$ vaut h, h pouvant du reste varier d'un point à l'autre, de la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = h(x_0, y_0, z_0)$$

on devra tirer la valeur de T pour la substituer dans les équations (26).